２００３年度基礎数学講義ノート（３－１組）

２００３年６月７日分

§３．対数関数

１．対数の定義

目的　$a>0,\ a\neq 1$ に対し

対数　$\log_a x$

の定義．

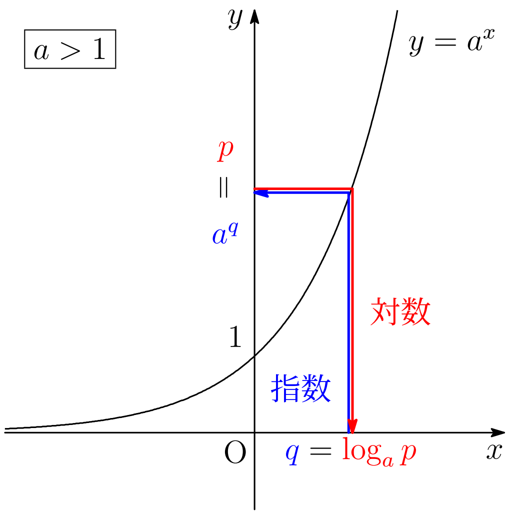
※ $\log_a x$ を単独に定義する方法もあるが，ここでは歴史（天文学では非常に大きな数の四則演算が必要であった．特に積と商の計算を比較的楽な和と差に帰着させた）にそって定める．

方法　指数関数の逆関数（逆対応）として定める．

正の実数 p に対して，$p=a^q$ となる実数 q を，a を底とする p の対数といい

$$\log_a p$$

で表す．



$$p=a^q \iff q=\log_a p \quad \begin{cases} \text{真数条件：} p>0 \\ \text{底の条件：} a>0,\ a\neq 1 \end{cases}$$

対数法則　$M,N>0,\ k$：実数

(1) $\log_a 1=0$

(2) $\log_a a=1$

(3) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(4) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(5) $\log_a M^k=k\cdot\log_a M$

指数法則

(1) $a^0=1$

(2) $a^1=a$

(3) $a^m a^n=a^{m+n}$

(4) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

(5) $(a^m)^n=a^{mn}$

※ (1)　$\log_a 1=0 \iff a^0=1$

$$\uparrow$$

$p=1$

$q=0$

(2) $\log_a a = 1 \iff a^1 = a$

$$\uparrow$$
$$p = a$$
$$q = 1$$

(3) $\log_a M = m \iff a^m = M$ 同様に $\log_a N = n \iff a^n = N$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$
$$p = M \qquad\qquad\qquad p = N$$
$$q = m \qquad\qquad\qquad q = n$$

よって，$MN = a^m a^n = a^{m+n}$

$$\therefore \quad a^{m+n} = MN \iff \log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$$
$$\uparrow$$
$$p = MN$$
$$q = m + n$$

(4) $\log_a M = m \iff a^m = M$ 同様に $\log_a N = n \iff a^n = N$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$
$$p = M \qquad\qquad\qquad p = N$$
$$q = m \qquad\qquad\qquad q = n$$

よって，$\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$\therefore \quad a^{m-n} = \frac{M}{N} \iff \log_a \frac{M}{N} = m - n = \log_a M - \log_a N$$
$$\uparrow$$
$$p = \frac{M}{N}$$
$$q = m - n$$

(5) $\log_a M = m \iff a^m = M$

$$\uparrow$$
$$p = M$$
$$q = m$$

よって，$M^k = (a^m)^k = a^{km}$

$$\therefore \quad a^{km} = M^k \iff \log_a M^k = km = k \cdot \log_a M$$
$$\uparrow$$
$$p = M^k$$
$$q = km$$

底の変換公式　$a, b, c > 0$，$a, c \neq 1$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

※この公式は，底が異なる対数を扱うときに用いる．

問題３．１

(1) $\log_2 \frac{8}{3} + \log_2 6 = \log_2 \left(\frac{8}{3} \times 6\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4$

(4) $\log_2 12 - \log_2 3\sqrt{2} = \log_2 \frac{12}{3\sqrt{2}} = \log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_2 2 = \frac{3}{2}$

(5) $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \log_2 \sqrt[6]{\frac{3}{2}} = \log_2 6^{\frac{1}{2}} + \log_2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} - \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$

$= \frac{1}{2}\log_2 6 + \frac{1}{3}\log_2 \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\log_2 \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 3) + \frac{1}{3}(\log_2 2 - \log_2 3) - \frac{1}{6}(\log_2 3 - \log_2 2)$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\log_2 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)\log_2 3 = 1$

(6) $\frac{1}{3}\log_{10} 8 + \log_{10}\frac{3}{2} - \log_{10}\frac{3}{10} = \log_{10} 8^{\frac{1}{3}} + \log_{10}\frac{3}{2} - \log_{10}\frac{3}{10} = \log_{10} 2 + \log_{10}\frac{3}{2} - \log_{10}\frac{3}{10}$

$= \log_{10}\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{10}{3}\right) = \log_{10} 10 = 1$