２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年６月７日分

置換 P の符号 $\mathrm{sgn}P$ を次で定める．

$$\mathrm{sgn}P = \begin{cases} 1 & (P：\text{偶置換}) \\ -1 & (P：\text{奇置換}) \end{cases} = (-1)^{\text{互換の個数}}$$

※ $\mathrm{sgn}(PQ) = \mathrm{sgn}P \times \mathrm{sgn}Q$，$\mathrm{sgn}(P^{-1}) = \mathrm{sgn}P$

定義
$A = (a_{ij})$：n 次正方行列

$$|A| = \sum \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \times a_{1p_1} \cdots a_{np_n} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{和は } n \text{ 次の置換すべてについてとる．} \\ \text{項は } n! \text{ 個ある．} \end{array} \right)$$

を A の行列式という．$|A|$ を

$$\det A, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で表すこともある．
※ $i = 1, \ldots, n$ に対して

$$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1} \ \cdots \ a_{in}) \qquad (A \text{ の第 } i \text{ 行})$$

とおくとき，$|A|$ を

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \qquad (\text{行ベクトル表示})$$

と表すこともある．

2.3　行列式の基本性質

記号	意味
R	行（row）
C	列（column）
$R_i + R_j$	第 i 行 ＋ 第 j 行
kR_i	第 i 行 $\times$ k
$R_i \leftrightarrow R_j$	第 i 行と第 j 行の入れかえ
$C_i + C_j$	第 i 列 ＋ 第 j 列
kC_i	第 i 列 $\times$ k
$C_i \leftrightarrow C_j$	第 i 列と第 j 列の入れかえ
$R \leftrightarrow C$	行と列の入れかえ（転置）

以下，行列式の基本性質を「行ベクトル表示」で述べる．
証明は資料参照（完成次第ホームページにアップします）．

$$(D_1)\quad \begin{array}{r} \\ \\ i> \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{c}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ <i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$(D_2)\quad \begin{array}{r} \\ \\ i> \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ <i \\ \\ \\ \end{array} \qquad \text{（左辺は } kR_i\text{）}$$

$$(D_3)\quad \begin{array}{r} \\ \\ i> \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{（左辺は } R_i=\boldsymbol{0}\text{）}$$

$$(D_4)\quad \begin{array}{r} \\ \\ i> \\ \\ j> \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ <i \\ \\ <j \\ \\ \\ \end{array} \qquad \text{（左辺は } R_i\leftrightarrow R_j\text{）}$$

$$(D_5)\quad \begin{array}{r} \\ \\ i> \\ \\ j> \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{（左辺は } R_i=R_j\text{）}$$

$$(D_6)\quad \begin{array}{r} \\ \\ i> \\ \\ j> \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i+k\boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ <i \\ \\ <j \\ \\ \\ \end{array} \qquad \text{（左辺は } R_i+kR_j\text{）}$$

(D_7) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{q_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{q_n} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ q_1 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$

(D_8) $|{}^tA| = |A|$ （左辺は $R \leftrightarrow C$）

(D_9) 行列式の性質は，行の性質を列の性質に変えても成り立つ（列の性質を D'_* で表す）.

例 2.1

$$\left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 2.2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \text{\Large 0} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \text{\Large 0} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}$$

※使用頻度：$(D_6) >> (D_2), (D_4) >$ 例 2.1, 例 2.2

例 2.3

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{R_2-2R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrrl} & 2 & 3 & 1 & 1 & \cdots\ R_2 \\ -) & 2 & 6 & -2 & 4 & \cdots\ 2R_1 \\ \hline & 0 & -3 & 3 & -3 & \end{array}$$

$$\overset{R_4+3R_1}{=} \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ \hline 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & -1 & 9 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{rrrrrl} & -3 & 0 & 2 & 3 & \cdots\ R_4 \\ +) & 3 & 9 & -3 & 6 & \cdots\ 3R_1 \\ \hline & 0 & 9 & -1 & 9 & \end{array}$$

$$\overset{\text{例 2.1}}{=} 1 \times \begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \\ 9 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2+2R_1}{=} \begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -8 \\ 9 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrl} & 6 & 3 & -2 & \cdots\ R_2 \\ +) & -6 & 6 & -6 & \cdots\ 2R_1 \\ \hline & 0 & 9 & -8 & \end{array}$$

$$\overset{R_3+3R_1}{=} \left|\begin{array}{c|cc} -3 & 3 & -3 \\ \hline 0 & 9 & -8 \\ 0 & 8 & 0 \end{array}\right|$$

$$\overset{\text{例 }2.1}{=} -3 \times \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \times \{9 \cdot 0 - (-8) \cdot 8\}$$

$$= -192$$

$$\begin{array}{rrrrl} & 9 & -1 & 9 & \cdots\ R_3 \\ +) & -9 & 9 & -9 & \cdots\ 3R_1 \\ \hline & 0 & 8 & 0 & \end{array}$$

演習 2A

2. (1) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \overset{C_1\text{に}(D_2')}{=} a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \overset{C_2\text{に}(D_2')}{=} ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ a & b & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^3 \end{vmatrix} \overset{C_3\text{に}(D_2')}{=} abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_2-C_1}{=} abc \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b-a & c \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{C_3-C_1}{=} abc \left|\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{array}\right| \overset{\text{例 }2.1}{=} abc \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} \overset{C_1\text{に}(D_2')}{=} abc(b-a) \begin{vmatrix} 1 & c-a \\ b+a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_2\text{に}(D_2')}{=} abc(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)\{1 \cdot (c+a) - 1 \cdot (b+a)\}$$

$$= abc(b-a)(c-a)(c-b) = abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

※ここでは細かく分けたが，1,2,3 番目，4,5 番目，8,9 番目の等式変形はそれぞれいっぺんに変形できるようになってほしい．また，最後から 2 番目のままでもいいが，通常 a, b, c が循環するように表す方が好ましい．