２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年6月２１日分

2.4 行列式の展開

n 次正方行列 A から第 i 行と第 j 列をのぞいてできる行列

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

の行列式を D_{ij} で表し

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

を A における a_{ij} の余因子という．

(D_{10}) $|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, \ldots, n)$ — 第 i 行展開 —

(D'_{10}) $|A| = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, \ldots, n)$ — 第 j 列展開 —

(D_{11}) $a_{i1}A_{k1} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k)$

(D'_{11}) $a_{1j}A_{1k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 \quad (j \neq k)$

定義

A_{ij} を (j,i) 成分にもつ n 次正方行列

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列という．このとき

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \begin{pmatrix} |A| & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

が成り立つ．実際

$$\begin{aligned} A\widetilde{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \cdots & a_{11}A_{n1} + \cdots + a_{1n}A_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}A_{11} + \cdots + a_{nn}A_{1n} & \cdots & a_{n1}A_{n1} + \cdots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & 1 \end{pmatrix} = |A|E \end{aligned}$$

$\widetilde{A}A = |A|E$ も同様.

例

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}
&\overset{C_1+6C_3}{=} \begin{vmatrix} -9 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -19 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{R_3\text{展開}}{=} -1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -9 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -19 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} -9 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -19 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{R_2-4R_1 \\ R_3-R_1}}{=} - \begin{vmatrix} -9 & 5 & 1 \\ 38 & -23 & 0 \\ -10 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{C_3\text{展開}}{=} - \left\{ 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 38 & -23 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} \right\} \\
&= - \begin{vmatrix} 38 & -23 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} \\
&= -\{38 \cdot (-3) - (-23) \cdot (-10)\} \\
&= 344
\end{aligned}
$$

補足

行列式 $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$ を 2 通りの方法で求めてみよう.

(1) サラス

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-bac-cba-abc = a^3+b^3+c^3-3abc$$

(2) 行変形，列変形

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} \overset{C_1+(C_2+C_3)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & c & b \\ a+b+c & a & c \\ a+b+c & b & a \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}{=} \left|\begin{array}{c|cc} a+b+c & c & b \\ \hline 0 & a-c & c-b \\ 0 & b-c & a-b \end{array}\right|$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a-c & c-b \\ b-c & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\{(a-c)(a-b)-(c-b)(b-c)\}$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

※以上により，次の因数分解の公式が得られる.

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$