２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年６月２８日分

2.5　行列式の積の行列式

(D_{14}) $|AB| = |A||B|$

2.7　正則行列と逆行列

n 次正則行列 A に対して

$$AX = XA = E$$

をみたす n 次正方行列 X が存在するとき，A は正則であるという．このとき，X を A の逆行列といい，A^{-1} で表す．

定理 2.2

A：正則 $\iff$ $|A| \neq 0$

このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}, \qquad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

証明

$[\Longrightarrow]$ A：正則とすると，逆行列が A^{-1} 存在して $AA^{-1} = E$

よって (D_{14}) より

$$|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1 \qquad \therefore \quad |A| \neq 0$$

$[\Longleftarrow]$ $|A| \neq 0$ とし $X = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ とおくと，先ほど示したことにより

$$AX = A\left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\right) = \frac{1}{|A|}(A\widetilde{A}) = \frac{1}{|A|}(|A|E) = E$$

同様に $XA = E$ も示せるので A は正則．

このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}, \qquad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

は明らか．　∎

系

$AX = E$ をみたす X が存在 $\Longrightarrow$ A：正則

2.6　クラーメルの公式

$x_1, \ldots, x_n$ を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

を考える．これは

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad bmx = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおくことにより

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

とかける．A も列ベクトル表示 $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ し

$$D_i = |\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{i-1} \ \boldsymbol{b} \ \boldsymbol{a}_{i+1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n| \quad (i = 1, \ldots, n)$$

とおく（$\boldsymbol{a}_i$ を $\boldsymbol{b}$ に変えたもの）と，クラーメルの公式が得られる．

定理 2.1　（クラーメルの公式）
$|A| \neq 0$ ならば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 組

$$x_i = \frac{D_i}{|A|} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

の解をもつ．

※ $n = 2, 3$ の場合は，行列式を導入する前に確認済み．

証明

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\right)\boldsymbol{b} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{n1} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

※後に実用的な解法（掃出法）を紹介する．

2.8　$n \times n$ 型斉次連立 1 次方程式の解

明らかに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を自明解といい，そうでない解を非自明解という．

定理 2.3
$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が非自明解をもつ $\iff$ $|A| = 0$

※この定理は重要で，後に「固有値」を求めるときに必要となる（8 章）．

演習 2A

4. (1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & ax_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} \overset{R_1+2R_2}{=} \begin{vmatrix} a+4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} \overset{C_2\text{展開}}{=} 1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a+4 & -4 \\ 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+4 & -4 \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$= (a+4)\cdot a - (-4)\cdot 1 = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2$

よって，値が 0 になるのは $a = -2$

(2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (a+2)x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & (a-1)x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & (a+3)x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

$$\iff \begin{pmatrix} a+2 & 1 & -2 \\ -2 & a-1 & 4 \\ -1 & -1 & a+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+2 & 1 & -2 \\ -2 & a-1 & 4 \\ -1 & -1 & a+3 \end{vmatrix} \overset{C_1+(C_2+C_3)}{=} \begin{vmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ a+1 & a-1 & 4 \\ a+1 & -1 & a+3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}{=} \left|\begin{array}{c|cc} a+1 & 1 & -2 \\ \hline 0 & a-2 & 6 \\ 0 & -2 & a+5 \end{array}\right|$$

$$= (a+1)\begin{vmatrix} a-2 & 6 \\ -2 & a+5 \end{vmatrix} = (a+1)\{(a-2)\cdot(a+5) - 6\cdot(-2)\} = (a+1)(a^2+3a+2)$$

$= (a+1)^2(a+2)$

よって，値が 0 になるのは $a = -1,\ -2$