

2003年度基礎数学講義ノート（2 - 1組）

2003年7月5日分

前期試験

- 1 行列の和, スカラー倍, 積
- 2 $A, B: n$ 次正方行列, k : 実数に対して $|kA| = k^n|A|$, $|AB| = |A||B|$, $A\tilde{A} = |A|E$ の利用
- 3 行列式
- 4 斉次連立 1 次方程式の非自明解

前期試験に向けて

- (1) 行列式の計算には, 余因子展開定理 (D_{10}, D'_{10}) は用いず, 行・列変形 (D_6, D'_6), 入れかえ (D_4, D'_4), スカラー倍 (D_2, D'_2) だけで計算できる.
- (2) 文字を使って定数を消すことはできないが, 定数を使って文字を消すことはできる.

例 1

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} - \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 9 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 - 2C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 9 \\ 5 & 3 & -12 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 9 \\ 3 & -12 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} - \begin{vmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 3 & -12 & 2 \\ -5 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 + 3C_1, C_3 + C_1} - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \\ -5 & -16 & 4 \end{vmatrix} = -(-2) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -16 & 4 \end{vmatrix} = 2\{-3 \cdot 4 - 5 \cdot (-16)\} = 136$$

例 2

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & -2 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - aC_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2a-2 \\ a & -2 & -a^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2a-2 \\ -2 & -a^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\{1 \cdot (-a^2) - (-2a-2) \cdot (-2)\} = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2$$

例 3

x, y, z を未知数とする斉次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} (a+3)x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + (a-1)y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + (a-1)z = 0 \end{cases} \cdots (*)$$

が非自明解をもつように a の値を定め, そのときの非自明解を求めてみよう.

$$\begin{vmatrix} a+3 & 2 & 2 \\ -2 & a-1 & -2 \\ -2 & -2 & a-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 + (R_2 + R_3)} \begin{vmatrix} a-1 & a-1 & a-1 \\ -2 & a-1 & -2 \\ -2 & -2 & a-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 - C_1, C_3 - C_1} \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ -2 & a+1 & 0 \\ -2 & 0 & a+1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1) \begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)^2$$

(*) が非自明解をもつのは, $(a-1)(a+1)^2 = 0$ より $a = \pm 1$

(1) $a = 1$ のとき, (*) は

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ -2x & - 2z = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ -2x - 2y & = 0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

②, ③ より $y = -x, z = -x$ で, これを ① に代入すれば $0 = 0$
つまり, x は任意でよいことが分かる.

$$\therefore \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \text{ は任意定数})$$

(2) $a = -1$ のとき, (*) は 3 つとも同じ $x + y + z = 0$ ($z = -x - y$) となる.

$$\therefore \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -s - t \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意定数})$$