２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年１０月４日分

$x_1, \ldots, x_n$ を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

に対して

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおく．

$\boxed{\text{掃出法}}$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を

$$(A \mid \boldsymbol{b}) \xrightarrow{\text{行変形}} (E \mid \boldsymbol{x})$$

によって解く方法．ここで，行変形とは

(1) $kR_i \quad (k \neq 0)$

(2) $R_i \leftrightarrow R_j$

(3) $R_i + kR_j \quad$ ($k = 0$ でもよい．$k = 0$ のときは何もしていない！)

例（前回と同じ）

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 7 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & -1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{7}R_3]{-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2-5R_3]{R_1-3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

※ $(A \mid \boldsymbol{b}) \xrightarrow{R} (E \mid \boldsymbol{x})$ とならないこともある．

例

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & + & 6z & = & 4 \\ 3x & + & 6y & + & 2z & = & -1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

これを方程式に直すと

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 0z & = & -1 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \\ 0x & + & 0y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

であって，2 つめの方程式において x, y, z はなんでもよいことが分かる．よって

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y=-1 \\ z=1 \end{array}\right. \qquad \therefore \quad \left\{\begin{array}{l} x=-2t-1 \\ y=t \\ z=1 \end{array}\right. \qquad (t \text{ は任意定数})$$

例（前期試験 $\boxed{4}$ に関連）

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (a-3)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (a-3)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (a-3)z & = & 0 \end{array}\right.$$ が非自明解をもつのは $a=1,4$ のときである．

このときの非自明解を掃出法により求めてみよう．

(1) $a=1$ のとき

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}R_3]{-\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

先ほどの例と同様に考えて $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=t \\ z=t \end{array}\right.$ $\quad (t \neq 0$ は任意定数)

(2) $a=4$ のとき

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

先ほどの例と同様に考えて $\left\{\begin{array}{l} x=s \\ y=t \\ z=-s-t \end{array}\right.$ $\quad (s, t \neq 0$ は任意定数)

※ $a = 1$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a = 4$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

※与えられた方程式を行列表現すると

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{ただし} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

上で出てきた列ベクトルを使って $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ が成り立つ．これが「行列の対角化」．
逆行列の求め方は次回．