２００３年度基礎数学講義ノート（３－１組）

２００３年１０月１１日分

§５．数列・関数の極限

x が a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に近づくならば，この α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の極限値といい

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha \quad (x \to a)$$

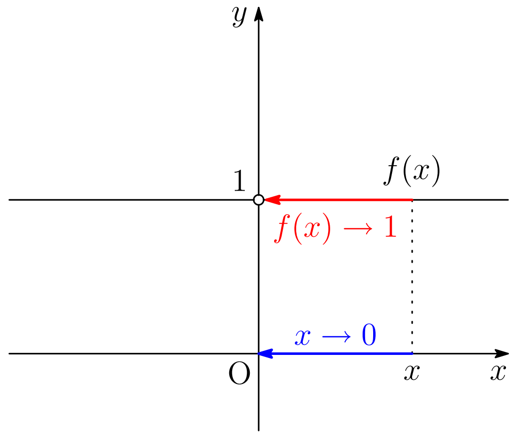
と書く.
※ $x \to \infty$ や $x \to -\infty$ のときも同様.

※極限値は $f(a)$ が定義されていない場合でも考えられる.
例

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ \text{定義されない} & (x = 0) \end{cases}$$

とするとき

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$



※ $f(a)$ が定義される場合でも，$f(a) = \alpha$ となるわけではない.
例

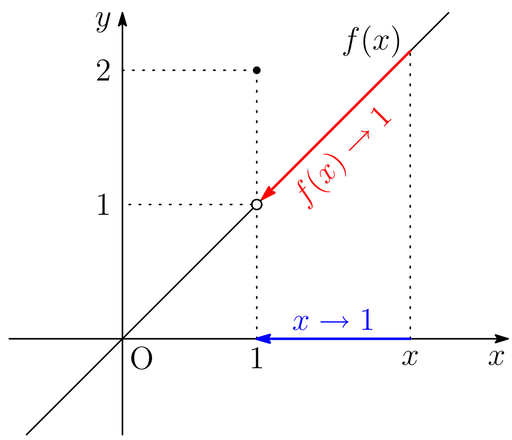
$$f(x) = \begin{cases} x & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$$

とするとき

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq 2 = f(1)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{極限} \neq \text{代入}$$



※ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \iff y = f(x)$ は $x = a$ で連続（グラフがつながっている）

$$\Updownarrow$$

$$\text{極限} = \text{代入}$$

連続関数の例

(1) 実数上で連続な関数

$$\text{定数関数，}\ n\ \text{次関数，指数関数，}\ \sin x\text{，}\ \cos x$$

(2) 実数の部分集合上で連続な関数（$\alpha > 0$，n：自然数，m：整数）

関数	x^α	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{x^\alpha}$	$\log x$	$\tan x$
定義域	$x \geqq 0$	$x \neq 0$	$x > 0$	$x > 0$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi$

☆分数関数の極限値の求め方

$$\frac{\text{連続関数}}{\text{連続関数}} \fallingdotseq \text{連続関数}$$

$$\uparrow$$

例外 $\cdots$ 代入したら「分母 $= 0$」

なので

(1) 代入したら「分母 $\neq 0$」 $\Longrightarrow$ そのまま

(2) 代入したら「分母 $= 0$」 $\Longrightarrow$ 「分母 $= 0$」になる因子をなくす
（悪さをしているやつをあぶりだし，そいつらを相殺）

$\boxed{\text{問題５．６}}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-3)} \overset{\text{約分}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x-3} \overset{\text{代入}}{=} \frac{-1+2}{-1-3} = -\frac{1}{4}$

※ $x+1$ が $x=-1$ を代入したら「分母 $= 0$」にする因子．だから相殺（約分）する．

(6) $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{x^3-2x^2+16}{x^3+8} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-4x+8)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4x+8}{x^2-2x+4}$

$\displaystyle = \frac{(-2)^2-4\cdot(-2)+8}{(-2)^2-2\cdot(-2)+4} = \frac{5}{3}$

※例えば，x^3-2x^2+16 に $x=-2$ を代入すれば 0 になるので，x^3-2x^2+16 は $x+2$ を因数にもつ（因数定理）．後は，割り算 $(x^3-2x^2+16) \div (x+2)$ を実行すれば因数分解ができる．

(9) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}} \overset{\text{有理化}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{3x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(4+x)-(4-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{2}$

$\displaystyle = \frac{3(\sqrt{4+0}+\sqrt{4-0})}{2} = 6$