

2003年度基礎数学講義ノート（2 - 1組）

2003年10月11日分

掃出法による逆行列の計算 $A: n$ 次正方行列

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \text{ とおくと, } AA^{-1} = E \text{ より}$$

$$A \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

よって

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$(*) \iff A(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n) = (\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) \iff A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$$

であるが

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$$

は掃出法

$$(A \mid \mathbf{e}_1) \xrightarrow{R} (E \mid \mathbf{x}_1), \dots, (A \mid \mathbf{e}_n) \xrightarrow{R} (E \mid \mathbf{x}_n)$$

により解けるので

$$(A \mid E) \xrightarrow{R} (E \mid A^{-1})$$

により, 逆行列が求まる.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = (E \mid A^{-1}) \quad \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例(前回の最後の例に関連)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[-R_3]{-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 - 2R_2]{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[3R_2 + R_3]{3R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \quad \therefore P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

前回最後の確認

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$