２００３年度基礎数学講義ノート（３－１組）

２００３年１０月１８日分

代表的な極限値

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0 \quad (\alpha>0)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad (n：自然数)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

※ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は存在する（証明は難しい）ので，この極限値を “e” で表す．この値は $e=2.718281828\cdots$ で，無理数であることが知られている．また，この e を底とする対数を自然対数といい，$\log_e x$ を単に $\log x$ と底 e を省略してかく習慣がある．

※ (6) の $\cos, \tan$ バージョン

① $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

② $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right)=1\times 1=1$$

問題５．７

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\times 4\right)=1\times 4=4$$

※上の公式 (6) は,「青 $\to 0$」のとき「赤 $\to 0$」であれば使える．

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\times 4\right\}=\frac{1}{2}\times 4=2$$

※上の公式 ① は,「青 $\to 0$」のとき「赤 $\to 0$」であれば使える．
※ 2 倍角の公式 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ を使ってもできる．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left\{2\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\}=2\times 1^2=2$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x}{\sin x}\times x\right)=\frac{1}{2}\times 1\times 0=0$$

(7) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin 2x}{2x}\times 2(\sqrt{x+1}+1)\right\}=1\times 4=4$$