２００３年度基礎数学講義ノート（３－１組）

２００３年１０月２５日分

§６．微分法

０．導入

目的
- 曲線の接線（らしきもの）の方程式を求める
- 関数のグラフをかく（関数の増減を調べる）

$$\Downarrow$$

接線からアプローチ

参考

接線

一般に，点 (a, b) を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y = m(x-a) + b$$

で与えられた．

$$\Downarrow$$

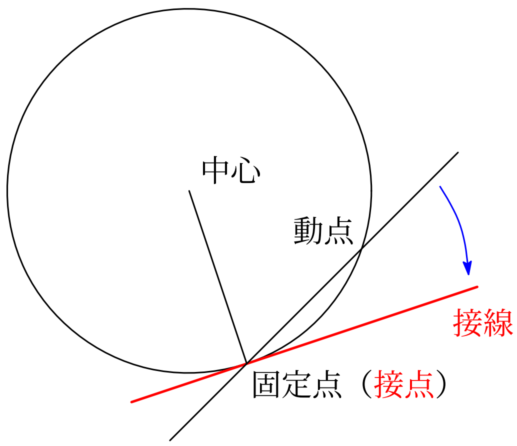
曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{傾き}}(x-a) + f(a) \qquad （通る点：(a, f(a))，傾き：未知）$$

とならなければいけない．

円の接線

円の接線に関しては，歴史的にみてもかなり古くから扱われ，どんなものかよく分かっている．イメージ的に明らかなように,「固定点（接点）とそれ以外の円上の動点を結ぶ直線は，動点を固定点に近づけたとき，固定点における接線に近づく」（右図参照）．



方法

円の接線を参考にし，未知である傾きを決定する．

具体的には，曲線 $y = f(x)$ 上の固定点 $(a, f(a))$ と動点 $(a+h, f(a+h))$ を結ぶ直線の傾き

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} \quad \text{つまり} \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が，動点を固定点に近づけたとき（h を 0 に近づけたとき），近づく値（これが傾き）を求める．

１．微分係数

$f(x)$：$x=a$ で微分可能 $\cdots\cdots$ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

↑

$f(x)$ の $x=a$ における微分係数

※ $f(x)$：$x=a$ で微分可能 $\Longrightarrow$ $x=a$ で連続

証明

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能とすると，$f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在する．このとき

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)\right\}=f'(a)\times 0=0$$

即ち $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ が成り立つので，$f(x)$ は $x=a$ で連続（10/11 のノート参照）． ∎

２．曲線の接線

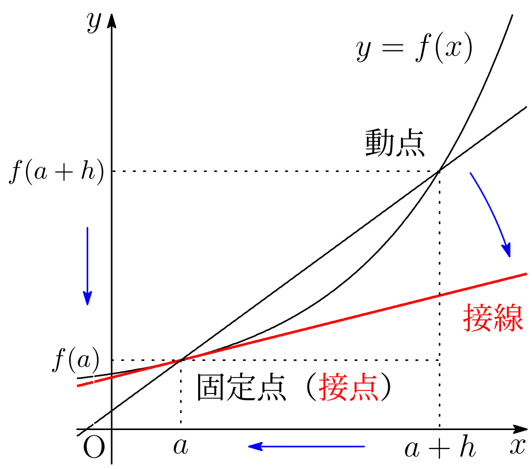
$f(x)$ が $x=a$ で微分可能なとき

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

を曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,f(a))$ における接線という．

※接線の方程式は，接点の x 座標が分かれば，この式に代入して簡単に求められる．

$h\to 0$ のときの図



３．導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

↑

$f(x)$ の導関数（$f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を微分するという）

※ $f'(x)$ を $\dfrac{dy}{dx}$ や y' とかくこともある．

☆微分係数の求め方

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を計算する（計算の仕方は後ほど）．

(2) 導関数 $f'(x)$ に $x=a$ を代入して，微分係数 $f'(a)$ を求める．