２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

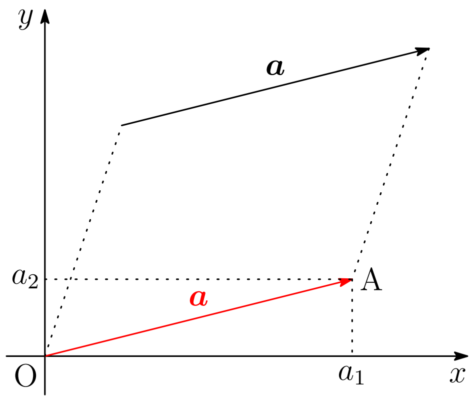
２００３年１０月２５日分

２次元数ベクトル空間（平面）

xy 平面上のベクトル $\boldsymbol{a}$ を原点 O が始点となるように平行移動すれば終点 A が一意に定まる．逆に，点 A に対して，ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が定まる．
そこで，点 A の座標 (a_1, a_2) を用いて，ベクトル $\boldsymbol{a}$ $(= \overrightarrow{\mathrm{OA}})$ の標準成分表示を

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

と定める．

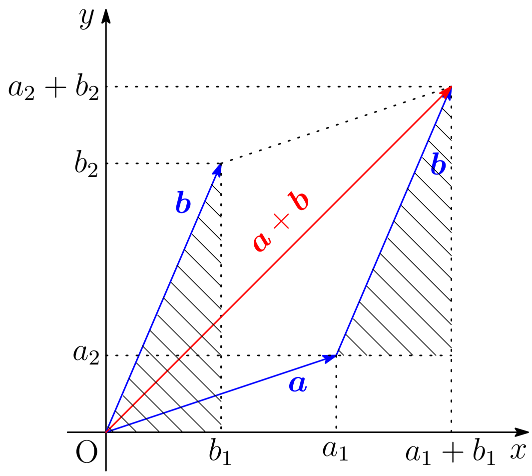


(1) $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき，図より

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

となり，2 次のベクトルの和（p.5 参照）と一致する．



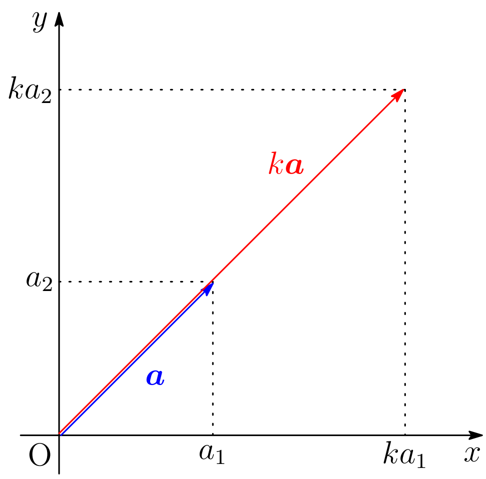
(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ のとき，図より

$$k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

となり，2 次のベクトルのスカラー倍（p.5 参照）と一致する．

※ $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$-\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$



(4) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ に対して

$$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}\ (k \neq 0) \iff b_1 = ka_1,\ b_2 = ka_2 \iff a_1b_2 - b_1a_2 = 0$$

よって，$A = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ とおくとき

$$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b} \iff |A| = 0$$

定義

2 つの実数を成分にもつ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を 2 次元数ベクトルといい，これらの全体を 2 次元数ベクトル空間といい $\mathbb{R}^2$ で表す．

1 次独立，1 次従属

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ に対して，$A = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})$ とおく．
(1) $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ でないとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立であるという．

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} : 1\ 次独立 \iff |A| \neq 0$$

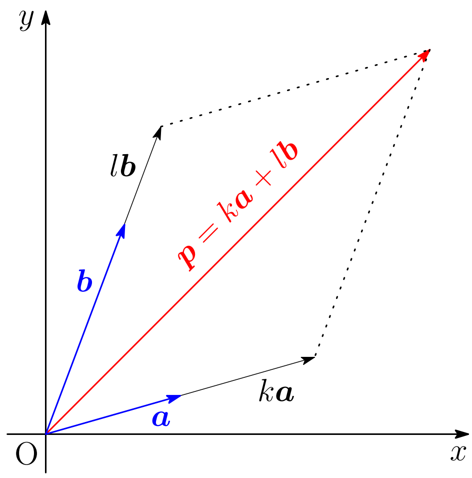
このとき，任意の $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ に対して，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ は一意解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ をもつ（**定理 2.1** 参照）．この解を用いれば

$$\boldsymbol{p} = A\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$$

と一意に表せる．つまり,「1 次独立な $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ によって，平面 $\mathbb{R}^2$ が張れる」．このことを

$$\mathbb{R}^2 = \underbrace{\mathrm{sp}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}}_{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ が張る（\mathrm{span}）空間}$$

と表す．



※ $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ を $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ に関する $\boldsymbol{p}$ の成分という．$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_2$ のとき，$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{p}$ の標準成分表示と一致する．ただし，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．