２００３年度基礎数学講義ノート（３－１組）

２００３年１１月１日分

４．代表的な導関数

自然数 n と，0 でない実数 α，定数 c に対して，次が成り立つ．

(1) $(c)' = 0$

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

(4) $(e^x)' = e^x$

(6) $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(8) $(\sin x)' = \cos x$

(9) $(\cos x)' = -\sin x$

(10) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

※一般形

(3) $\{(Ax+B)^\alpha\}' = A\cdot\alpha(Ax+B)^{\alpha-1}$

(4) $(e^{Ax+B})' = A\cdot e^{Ax+B}$

(6) $(\log|Ax+B|)' = A\cdot\dfrac{1}{Ax+B}$

(8) $\{\sin(Ax+B)\}' = A\cdot\cos(Ax+B)$

(9) $\{\cos(Ax+B)\}' = A\cdot\{-\sin(Ax+B)\}$

(10) $\{\tan(Ax+B)\}' = A\cdot\dfrac{1}{\cos^2(Ax+B)}$

５．いろいろな微分法則

0 でない実数 α，定数 c に対して，次が成り立つ．

(1) $\{cf(x)\}' = cf'(x)$

(2) $\{f(x)\pm g(x)\}' = f'(x)\pm g'(x)$　（複号同順）

(3) 積の微分法則

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(4) 商の微分法則

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{特に} \quad \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

(5) 合成関数の微分法則

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))\cdot f'(x) \quad \cdots(*) \qquad \text{特に} \quad \{f(x)^\alpha\}' = \alpha f(x)^{\alpha-1}\cdot f'(x)$$

(6) 対数関数の微分法則

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

※ $(*)$ の意味

・$z = g(f(x))$ …… $z = g(y)$ と $y = f(x)$ の合成関数

・$\{g(f(x))\}'$ …… $z = g(f(x))$ を x で微分　$\dfrac{dz}{dx}$

・$g'(f(x))$ …… $z = g(y)$ を y で微分した $g'(y)$ に $y = f(x)$ を代入　$\dfrac{dz}{dy}$

・$f'(x)$ …… $y = f(x)$ を x で微分　$\dfrac{dy}{dx}$

これにより，$(*)$ を

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

と略記すると分かりやすい．

※ $z=f(x)^\alpha$ は $z=y^\alpha$ と $y=f(x)$ の合成

$$\therefore\quad \{f(x)^\alpha\}'=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\alpha y^{\alpha-1}\cdot f'(x)=\alpha f(x)^{\alpha-1}\cdot f'(x)$$

※ $z=\log|f(x)|$ は $z=\log|y|$ と $y=f(x)$ の合成

$$\therefore\quad \{\log|f(x)|\}'=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

問題６．１

(2) $\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{4}x^2-3x+12\right)'=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-3$

(5) $\{(2x^2-3)\}'\overset{合}{=}3(2x^2-3)^{3-1}\cdot(2x^2-3)'=3(2x^2-3)^2\cdot 4x=12x(2x^2-3)^2$

(7) $\left(\frac{1+x+x^2}{1-x-x^2}\right)'\overset{商}{=}\frac{(1+x+x^2)'(1-x-x^2)-(1+x+x^2)(1-x-x^2)'}{(1-x-x^2)^2}$

$$=\frac{(1+2x)(1-x-x^2)-(1+x+x^2)(-1-2x)}{(1-x-x^2)^2}=\frac{2(1+2x)}{(1-x-x^2)^2}$$

問題６．２

(4) $(\sqrt{x}e^{2x})'\overset{積}{=}(\sqrt{x})'e^{2x}+\sqrt{x}(e^{2x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{2x}+\sqrt{x}\cdot 2e^{2x}=\frac{(4x+1)e^{2x}}{2\sqrt{x}}$

※ $(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(7) $\{\log(1+\cos x)\}'\overset{対}{=}\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}=-\frac{\sin x}{1+\cos x}$

(8) $\left(\frac{1+\log x}{x}\right)'\overset{商}{=}\frac{(1+\log x)'x-(1+\log x)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\log x)\cdot 1}{x^2}=-\frac{\log x}{x^2}$

(12) $\{\log(x+\sqrt{x^2+a})\}'\overset{対}{=}\frac{(x+\sqrt{x^2+a})'}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{(x)'+(\sqrt{x^2+a})'}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

※ $(\sqrt{x^2+a})'=\{(x^2+a)^{\frac{1}{2}}\}'\overset{合}{=}\frac{1}{2}(x^2+a)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+a)'=\frac{1}{2}(x^2+a)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$