

2003年度基礎数学講義ノート（2 - 1組）

2003年11月1日分

1 次独立, 1 次従属

$a, b \in \mathbb{R}^2$ ($a, b \neq 0$) に対して, $A = (a \ b)$ とおく.

(1) $a \nparallel b$ でないとき, a と b は **1 次独立**であるという.

$$a, b : 1 \text{ 次独立} \iff |A| \neq 0$$

このとき, 任意の $p \in \mathbb{R}^2$ に対して, 連立 1 次方程式 $Ax = p$ は一意解 $x = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ をもつ (定理 2.1 参照). この解を用いれば

$$p = A \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = (a \ b) \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = ka + lb$$

と一意に表せる. つまり, 「1 次独立な $a, b \in \mathbb{R}^2$ によって, 平面 $\mathbb{R}^2$ が張れる». このことを

$$\mathbb{R}^2 = \text{sp}\{\underline{a}, \underline{b}\}$$

a, b が張る (span) 空間

と表す.

$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ を $\{a, b\}$ に関する p の **成分** という. $a = e_1, b = e_2$ のとき, $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ は p の標準成分表示と一致する. ただし, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

例

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ とおく.}$$

連立 1 次方程式 $(a \ b)x = p$ は掃出法

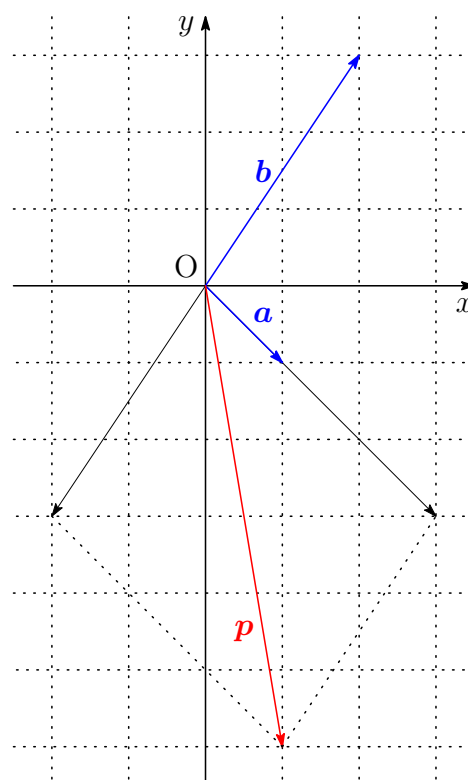
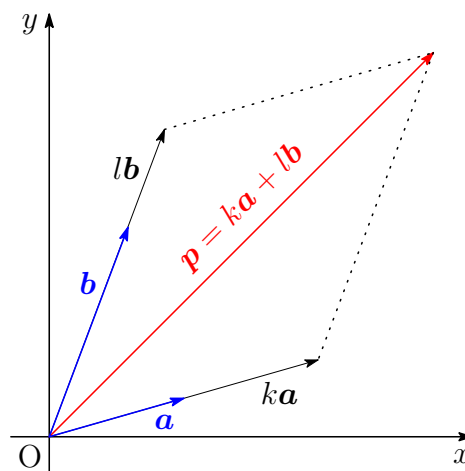
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ -1 & 3 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 5 & | & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

により一意解 $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ をもつので

$$p = 3a - b$$

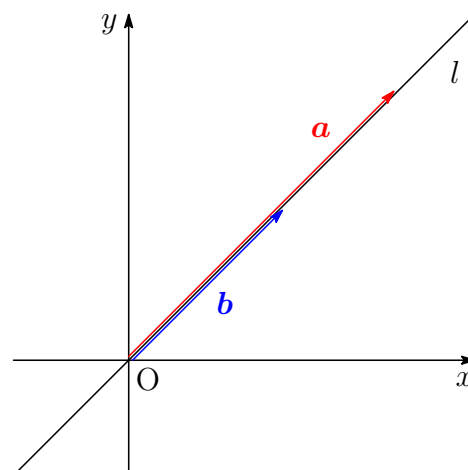
と表せる.



(2) $a//b$ のとき, a と b は 1 次従属であるという.

$$a, b : 1 \text{ 次従属} \iff |A| = 0$$

このとき, a, b は平面を張れず, 原点を通る直線
 $l : \{ka \mid k \in \mathbb{R}\}$ を張る.



内積

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ に対して}$$

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

を a と b の内積という. 内積は次の性質を満たす.

- (1) $\langle a, a \rangle \geq 0$
- (2) $\langle a, a \rangle = 0 \iff a = 0$
- (3) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
- (4) $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$
- (5) $\langle ka, b \rangle = k \langle a, b \rangle$
- (6) $\langle a, a \rangle = \|a\|^2$
- (7) $\|a \pm b\|^2 = \|a\|^2 \pm 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2$ (複号同順)
- (8) $\langle a + b, a - b \rangle = \|a\|^2 - \|b\|^2$

証明

(1) ~ (6) は容易.

$$(7) \|a + b\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle = \|a\|^2 + 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2$$

「-」も同様.

$$(8) \langle a + b, a - b \rangle = \langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle - \langle b, b \rangle = \|a\|^2 - \|b\|^2 \quad \blacksquare$$

内積の図形的な意味

$a, b \in \mathbb{R}^2$ ($a, b \neq 0$) に対して, A, B, θ (a と b のなす角) を図のようにとる.

OAB に対して (第 2) 余弦定理を使うと

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta$$

一方, 内積の性質 (7) より

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle$$

よって

$$\langle a, b \rangle = \|a\|\|b\|\cos\theta$$

これより

$$\langle a, b \rangle = 0 \iff \underline{a \perp b}$$

a と b が直交

