２００３年度基礎数学講義ノート（３－１組）

２００３年１１月８日分

７．関数の増減

(2) $f'(x)$ の符号と関数の増減

$f(x)$ がある区間で微分可能で

$$\begin{cases} \text{常に } f'(x) > 0 & \Longrightarrow \quad \text{その区間で単調増加} \\ \text{常に } f'(x) < 0 & \Longrightarrow \quad \text{その区間で単調減少} \end{cases}$$

※増加と減少の変わる（可能性のある）ところは，$f'(a) = 0$ をみたす $x = a$ のところ．このとき，$x = a$ の近くでは $y = f(x)$ のグラフは平らに近い．

※簡単な関数（例えば n 次関数）に対しては，$f'(x)$ の符号だけでグラフがかけるが，複雑な関数は，$f''(x)$ の符号により曲線の凹凸まで調べないとかけない．

☆関数のグラフのかき方（簡単 version）

$y = f(x)$ に対して

(1) $f'(x)$ を計算して，$f'(x) = 0$ となる x を求める．

(2) (1) で求めた x の値を境にして増減表を作成．

(3) 増減表の通りに曲線をかく．

(4) y 軸，x 軸を引く．

(5) 代表的な点を明らかにする．

問題６．６

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

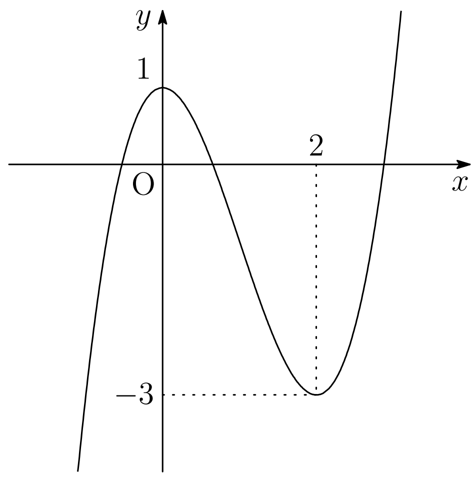
$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ より，$f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$

よって，増減表は

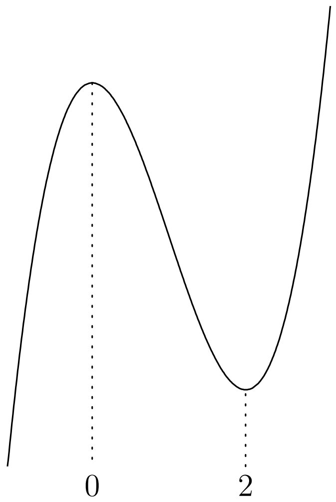
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

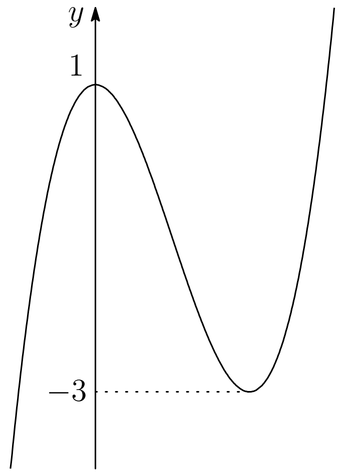
従って，グラフは右図で

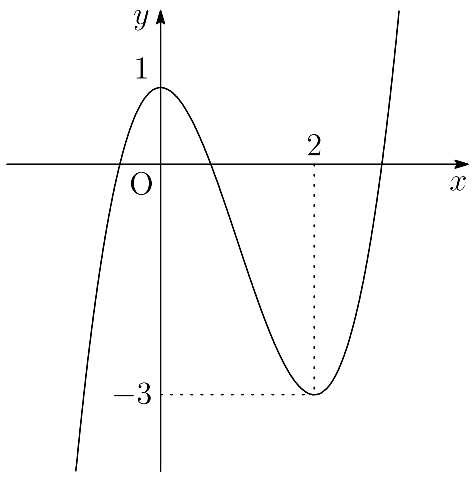
$$\begin{cases} x = 0 \text{ のとき極大値 } 1 \\ x = 2 \text{ のとき極小値 } -3 \end{cases}$$



シュミレーション





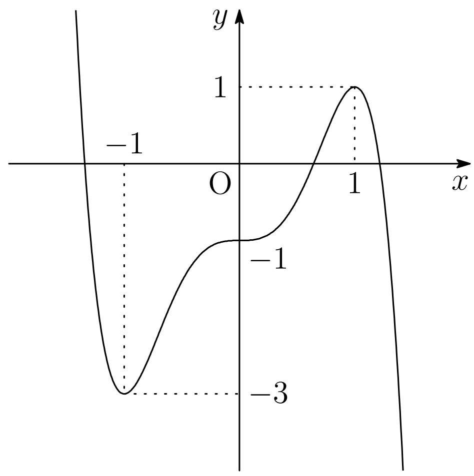


(4) $f(x) = -3x^5 + 5x^3 - 1$
$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = -15x^2(x+1)(x-1)$ より，$f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, \pm 1$
よって，増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$

従って，グラフは右図で

$$\begin{cases} x = 1 \text{ のとき極大値 } 1 \\ x = -1 \text{ のとき極小値 } -3 \end{cases}$$



※ $-15x^2 \leqq 0$ なので，$f'(x) = -15x^2(x+1)(x-1)$ の符号は $(x+1)(x-1)$ の符号を調べればよい．