２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年１１月８日分

正射影，正規直交化

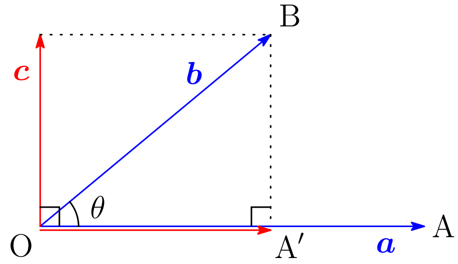
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ を 1 次独立とし，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 < \theta < \pi)$ とする．

(1) $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}$ の正規化という．

(2) 図のように A, B, A$'$ をとる．$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ を $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影という．

※ $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ の向き付きの長さは $\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$（$\cos\theta < 0$ のときは $\boldsymbol{a}$ と反対向きになる）なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \cdot \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$$



(3) (2) において $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{A'B}}$ とおくと

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}, \quad \mathrm{sp}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\} = \mathbb{R}^2$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の直交化という．

※ $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{A'B}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \boldsymbol{b} - \dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$

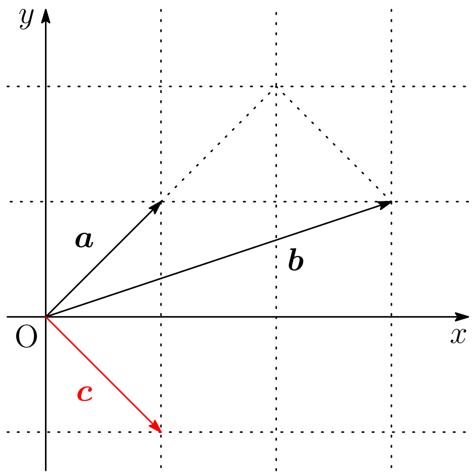
例

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき

$\|\boldsymbol{a}\|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 4$

よって

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



1 次変換

A を 2×2 行列とする．$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ は A との積により $A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ に写る．A との積をとるという写像を $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換という．

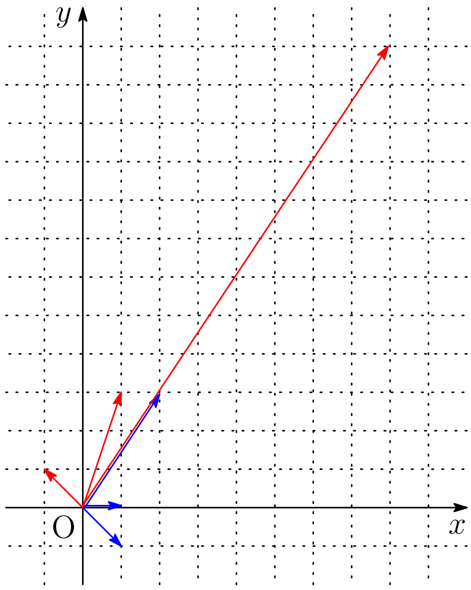
例

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ とおく．

(1) $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

(2) $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

(3) $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$



※ (2), (3) では $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ というように, 特殊な性質をもつ．$-1,4$ を A の固有値といい, $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ をそれぞれ $-1,4$ の固有ベクトルという．

$P=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&2\\4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5&0\\0&20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}$$

これが行列の対角化．