２００３年度基礎数学講義ノート（３－１組）

２００３年１１月１５日分

７．曲線の凹凸

(2) $f''(x)$ の符号と曲線の凹凸

$f(x)$ がある区間で 2 回微分可能で

$$\begin{cases} \text{常に } f''(x) > 0 & \Longrightarrow \quad \text{その区間で下に凸} \\ \text{常に } f''(x) < 0 & \Longrightarrow \quad \text{その区間で上に凸} \end{cases}$$

☆関数のグラフのかき方（一般 version）

$y = f(x)$ に対して

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を計算して，$f'(x) = 0, f''(x) = 0$ となる x をそれぞれ求める．

(2) (1) で求めた x の値を境にして増減表を作成.

(3) 増減表の通りに曲線をかく．漸近線についても注意する．

(4) y 軸，x 軸を引く．

(5) 代表的な点を明らかにする．

漸近線

$y = f(x)$ に対して

(1) $y = ax + b$ は

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (ax+b)\} = 0 \ \cdots ① \quad \text{または} \quad \lim_{x\to-\infty}\{f(x) - (ax+b)\} = 0 \ \cdots ②$$

をみたすとき，$y = f(x)$ の漸近線という．

※ a, b は次で与えられる．

① のとき，$a = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - ax\}$

② のとき，$a = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b = \lim_{x\to-\infty}\{f(x) - ax\}$

特に

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{または} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

をみたすとき，x 軸が $y = f(x)$ の漸近線となる．

(2) $x = p$ は

$$\lim_{x\uparrow p} f(x) = (\pm)\infty \quad \text{または} \quad \lim_{x\downarrow p} f(x) = (\pm)\infty$$

をみたすとき，$y = f(x)$ の漸近線という．

※このタイプの漸近線は，$f(x)$ の定義域「ぎりぎり」のところに現れることが多い．

例

$f(x)=\sqrt{4x^2+3x+2}$

① $a=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\sqrt{4+0+0}=2$

$b=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-2x\}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{4x^2+3x+2}+2x}$

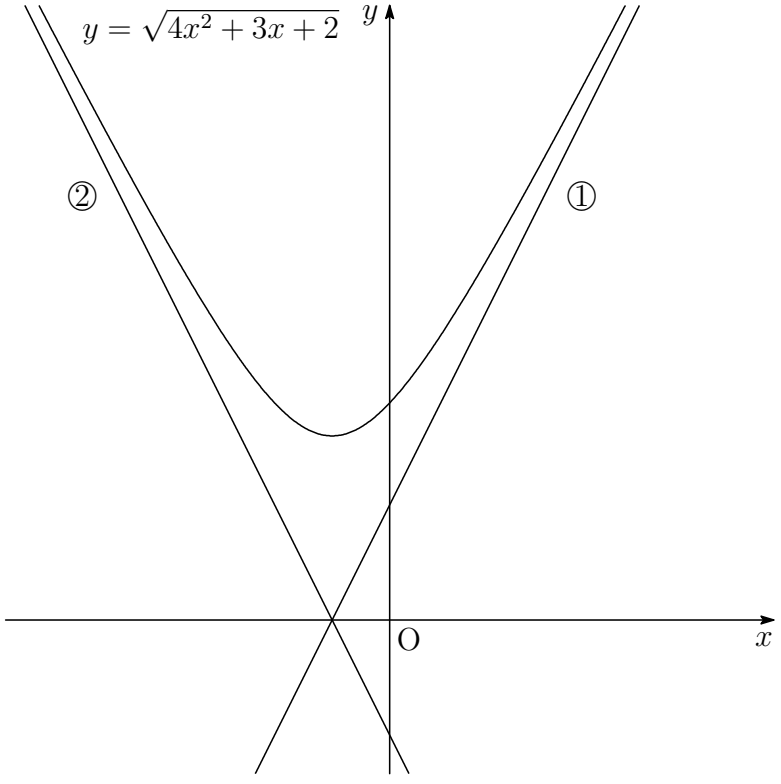
$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+2}=\dfrac{3+0}{\sqrt{4+0+0}+2}=\dfrac{3}{4}$

② $x=-y$ とおけば，$x\to-\infty \iff y\to\infty$ であることに注意.

$a=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{y\to\infty}\dfrac{\sqrt{4y^2-3y+2}}{-y}=-\lim_{y\to\infty}\sqrt{4-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{y^2}}=-\sqrt{4-0+0}=-2$

$b=\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(-2x)\}=\lim_{y\to\infty}\left(\sqrt{4y^2-3y+2}-2y\right)=\lim_{y\to\infty}\dfrac{-3y+2}{\sqrt{4y^2-3y+2}+2y}$

$=\lim_{y\to\infty}\dfrac{-3+\dfrac{2}{y}}{\sqrt{4-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{y^2}}+2}=\dfrac{-3+0}{\sqrt{4-0+0}+2}=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore\quad y=2x+\dfrac{3}{4},\ y=-2x-\dfrac{3}{4}$

※ $f(x)$ の定義域は $\mathbb{R}$ なので，$x=p$ の形の漸近線はない.