2003年度基礎数学講義ノート(2-1組)

2003年11月15日分

3次元数ベクトル空間(空間)

2次元数ベクトルと同様に, 3つの実数を成分にもつ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を **3次元数ベクトル** という. これらの全体を **3次元数ベクトル空間** といい $\mathbb{R}^3$ で表す.

和, スカラー倍

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \text{ とする.}$$

$$(1) \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$(3) k\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

1次独立, 1次従属

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$) に対して $A = (\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})$ とおく.

$$(1) A \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} 1 & k & l \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} // \mathbf{c} \text{ で } \mathbf{b} = k\mathbf{a}, \mathbf{c} = l\mathbf{a}$$

となる. このとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は **1次従属** であるという ($|A| = 0$ となる).

$\text{sp}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = \{k\mathbf{a} \mid k \in \mathbb{R}\}$ つまり $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は xyz 空間内の原点を通る直線を張る.

$$(2) A \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \text{ でなく } \mathbf{c} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$$

となる. このとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は **1次従属** であるという ($|A| = 0$ となる). $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は 1次独立であることに注意.

$\text{sp}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = \text{sp}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ つまり $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は xyz 空間内の原点を通る(傾いた)平面を張る.

(3) $A \xrightarrow{R} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right)$ のとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は 1 次独立であるという ($|A| \neq 0$ となる).

任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ は, 掃出法 $(A | \mathbf{x}) \xrightarrow{R} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & k \\ \hline 0 & 1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array} \right)$ により得られた k, l, m を用いて

$$\mathbf{x} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b} + m\mathbf{c}$$

と一意に表せる. つまり $\text{sp}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = \mathbb{R}^3$ (xyz 空間を張る).

例

(1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2+2R_1 \\ R_3-3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \mathbf{b} = -2\mathbf{a}, \mathbf{c} = 3\mathbf{a}$$

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1-R_2 \\ R_3+R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \mathbf{c} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$$

(3) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1-R_2 \\ R_3-R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1-R_3 \\ R_2+R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\therefore \mathbf{x} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$$