２００３年度基礎数学講義ノート（３－１組）

２００３年１１月２９日分

７．曲線の凹凸

(2) $f''(x)$ の符号と曲線の凹凸

$f(x)$ がある区間で 2 回微分可能で

$$\begin{cases} \text{常に } f''(x) > 0 & \Longrightarrow \quad \text{その区間で下に凸} \\ \text{常に } f''(x) < 0 & \Longrightarrow \quad \text{その区間で上に凸} \end{cases}$$

☆関数のグラフのかき方（一般 version）

$y = f(x)$ に対して

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を計算して，$f'(x) = 0, f''(x) = 0$ となる x をそれぞれ求める．

(2) (1) で求めた x の値を境にして増減表を作成．

(3) 増減表の通りに曲線をかく．漸近線についても注意する．

(4) y 軸，x 軸を引く．

(5) 代表的な点を明らかにする．

問題６．６

(5) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$f'(x) = 2 \times \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = 2 \times \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} \qquad \therefore \quad f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$$

$$f''(x) = -2 \times \frac{(x^2-1)'(x^2+1)^2 - (x^2-1)\{(x^2+1)^2\}'}{\{(x^2+1)^2\}^2}$$

$$= -2\times\frac{2x\cdot(x^2+1)^2 - (x^2-1)\cdot\{2(x^2+1)\cdot(x^2+1)'\}}{(x^2+1)^4} = -2\times\frac{2x\cdot(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 4x}{(x^2+1)^3}$$

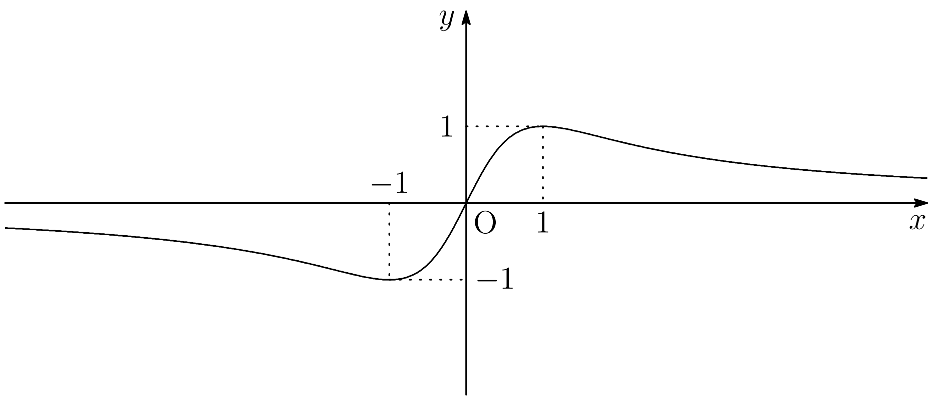
$$= \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \qquad \therefore \quad f''(x) = 0 \iff x = 0,\ \pm\sqrt{3}$$

よって，増減表とグラフは

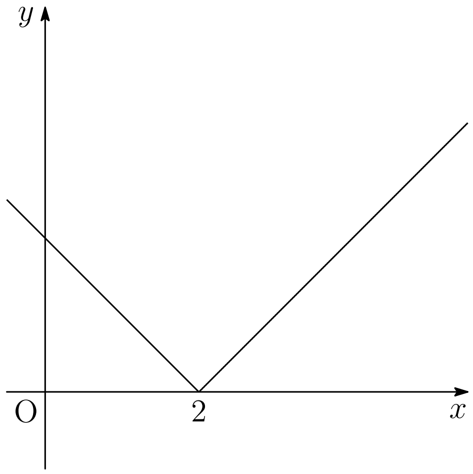
x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	$\sqrt{3}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$ より

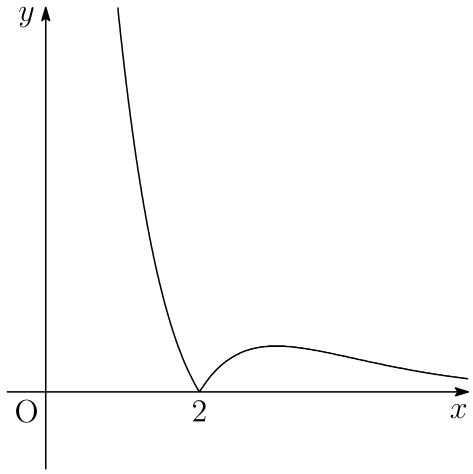
x 軸が漸近線



※グラフが簡単にかける場合もある．
(12) $f(x) = |x-2|e^{-x}$



$\xrightarrow{(*)}$



$(*) \cdots \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ より，左の方は e^{-x} により上に引っぱられ，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ より，右の方は e^{-x} により x 軸の方に引っぱられる．