２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年１１月２９日分

内積

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq 0)$ に対して

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積という．また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，2 次元のときと同様に

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$$

が成り立つ．これより

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$$

が分かる．

例

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|\boldsymbol{a}\|^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$, $\|\boldsymbol{b}\|^2 = 1^2 + (-2)^2 + 2^2 = 9$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 3$ より，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすれば

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

また，$\mathrm{A}(1, 0, 1)$, $\mathrm{B}(1, -2, 2)$ とおけば

$$\triangle\,\mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$$

８章．固有値

$A=(a_{ij})$：n 次正方行列，$\lambda\in\mathbb{C}$
$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ をみたす $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ $(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$ が存在するとき，λ を A の固有値といい，$\boldsymbol{x}$ を λ に対する A の固有ベクトルという．

☆固有値，固有ベクトルの求め方

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\iff A\boldsymbol{x}=\lambda E\boldsymbol{x}\iff(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

に注意すれば，定理 2.3 より

$$\lambda：\text{固有値}\iff(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ \cdots①\ \text{は非自明解をもつ}\iff|\lambda E-A|=0\ \cdots②$$

また，λ が ② をみたすものであるとき，連立方程式 ① の非自明解が固有ベクトルとなる（連立方程式 ① を解くときは，掃出法を用いるとよい）．
※ $\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|$ とおき，固有多項式という．

$$\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

また，$\varphi_A(\lambda)=0$ を固有方程式という．$\varphi_A(\lambda)=0$ は λ の n 次方程式なので「代数学の基本定理」より，複素数の範囲に重複度も含めて n 個の解をもつ．
この授業では，実数解しかもたない場合のみ扱う．このとき，固有ベクトルは $\mathbb{R}^n$ のベクトルとして選べる．

例

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$$

$$\varphi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)-(-2)\cdot(-3)=(\lambda+1)(\lambda-4)=0\qquad\therefore\quad\lambda=-1,\ 4$$

$\lambda=-1$ のとき
連立方程式 $(-E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を掃出法により解く．

$$(-E-A\mid\boldsymbol{0})=\left(\begin{array}{cc|c}-2&-2&0\\-3&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\-3&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2+3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

より，連立方程式は $x_1+x_2=0$ と同じ． $\therefore\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbb{R})$

$\lambda=4$ のとき
連立方程式 $(4E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を掃出法により解く．

$$(4E-A\mid\boldsymbol{0})=\left(\begin{array}{cc|c}3&-2&0\\-3&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2+R_1}\left(\begin{array}{cc|c}3&-2&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

より，連立方程式は $3x_1 - 2x_2 = 0$ と同じ．　$\therefore\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

以上により

$\lambda = -1$ のとき，固有ベクトルの 1 つは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 4$ のとき，固有ベクトルの 1 つは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

※ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．