２００３年度基礎数学講義ノート（３－１組）

２００３年１２月６日分

§７．積分法

０．導入

目的　曲線で囲まれた図形の面積を求める
（正確には，定める）

方法　与えられた図形を長方形で近似

$\Downarrow$　詳しく（簡単な場合）

連続関数 $f : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ に対し

$$y = f(x),\ x \text{ 軸},\ x = a,\ x = b$$

で囲まれる図形の面積 S を以下のように定義．

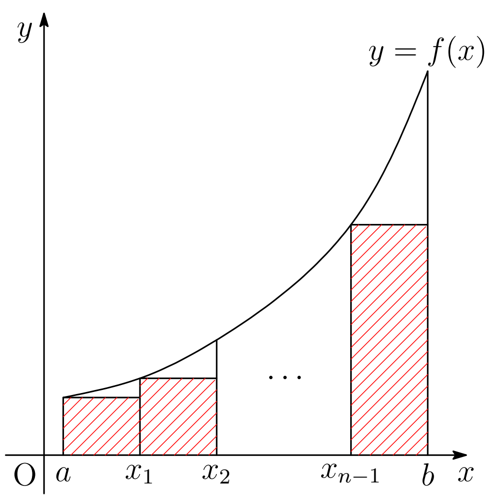
閉区間 $[a,b]$ を

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$
$$|\Delta| = \max\{x_k - x_{k-1} \mid 1 \leqq k \leqq n\}$$

と分割し，$k = 1, 2, \cdots, n$ に対し $x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k$ なる ξ_k を任意にとる．
このとき

$$\underbrace{\lim_{|\Delta|\to 0}}_{\text{分割を細かくする}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}_{\text{下図の斜線部の面積}}$$

が存在する（証明は難しい）．



左図では，n 等分，$\xi_k = x_{k-1}$
（左端）

↓

この値で求める面積 S を定め，a から b までの $f(x)$ の定積分といい

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

と表した．

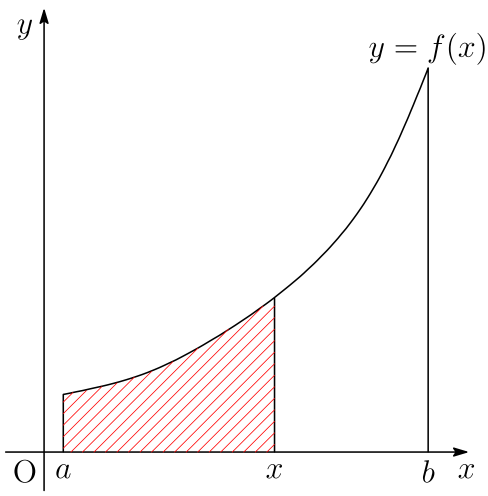
$$\int_a^b f(x)dx = S = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

（これの特別な場合が区分求積法）

さらに，$a \leqq x \leqq b$ に対して，下図の斜線部の面積を $S(x)$ とすると

$$\begin{cases} S'(x) = f(x) \\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a) \end{cases}$$

が成り立つことが示された（証明は難しい）．



$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

（正確には，これを不定積分という）

結論　面積（定積分）は，

$$S'(x) = f(x)$$

を満たす $S(x)$（このような関数を $f(x)$ の原始関数という）により求まる．

※正確には「原始関数 $\neq$ 不定積分」だが，f が連続のときは

原始関数 $=$ 不定積分
（これを式で表したものが微積分の基本定理）

以下，連続関数を扱うので，原始関数と不定積分を区別しない．

１．不定積分，原始関数

$f(x)$：given（連続）

$\underset{\sim}{F(x)}$：$F'(x)=f(x)$ を満たすもの

$\uparrow$

$f(x)$ の不定積分または原始関数といい，記号 $\displaystyle\int f(x)dx$ で表す

※C を（任意）定数とすると

$$\{F(x)+C\}'=F'(x)+(C)'=f(x)$$

より，$F(x)+C$ も $f(x)$ の不定積分となる．

$$\therefore\quad \int \underbrace{f(x)}_{\text{被積分関数}}dx = F(x)+\underbrace{C}_{\text{積分定数}}$$

※この授業では，積分定数 C を省略する．

２．不定積分の公式

(1) $\displaystyle\int 1dx\left(=\int dx\ \text{とかく}\right)=x$

(2) $\displaystyle\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\quad(\alpha\neq-1)$

特に $\displaystyle\int xdx=\frac{1}{2}x^2,\quad \int x^2dx=\frac{1}{3}x^3,\quad \int x^3dx=\frac{1}{4}x^4,\quad\cdots$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx=\log|x|$

(4) $\displaystyle\int e^xdx=e^x$

(6) $\displaystyle\int \sin xdx=-\cos x$

(7) $\displaystyle\int \cos xdx=\sin x$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x$

※一般形

A,B：定数，$A\neq 0$

(2) $\displaystyle\int (Ax+B)^\alpha dx=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\alpha+1}(Ax+B)^{\alpha+1}\quad(\alpha\neq-1)$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{Ax+B}dx=\frac{1}{A}\cdot\log|Ax+B|$

(4) $\displaystyle\int e^{Ax+B}dx=\frac{1}{A}\cdot e^{Ax+B}$

(6) $\displaystyle\int \sin(Ax+B)dx=\frac{1}{A}\cdot\{-\cos(Ax+B)\}$

(7) $\displaystyle\int \cos(Ax+B)dx=\frac{1}{A}\cdot\sin(Ax+B)$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(Ax+B)}dx=\frac{1}{A}\cdot\tan(Ax+B)$

問題７． １

(1) $\displaystyle\int (2x^2+x)dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -\frac{1}{x}$

(7) $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4}dx = \int (x+x^{-4})dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3x^3}$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}})dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + 2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4\sqrt{x}$

(9) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}dx = \int \left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + \log|x|$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \int (2x+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{2x+1}$

(18) $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

※２倍角の公式 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$

(20) $\displaystyle\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \tan x - x$

※ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$