２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年１２月６日分

例

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$ のとき，固有ベクトルの 1 つは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 4$ のとき，固有ベクトルの 1 つは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 2 \\ -2 & \lambda-1 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{C_1+(C_2+C_3)}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 2 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 2 \\ \lambda-1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}{=} (\lambda-1)\left|\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{array}\right| = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \qquad \therefore \quad \lambda = 1,\ 2,\ 3$$

<u>$\lambda = 1$ のとき</u>

連立方程式 $(E-A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を掃出法により解く．

$$(E-A \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2+2R_1 \\ R_3+3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1+R_2 \\ R_3+2R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より，連立方程式は $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ と同じ． $\quad \therefore \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

<u>$\lambda = 2$ のとき</u>

連立方程式 $(2E-A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を掃出法により解く．

$$(2E-A \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2+2R_1 \\ R_3+2R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1+R_2 \\ R_3+R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より，連立方程式は $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ と同じ． $\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\lambda = 3$ のとき

連立方程式 $(3E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を掃出法により解く．

$$(3E - A \mid \boldsymbol{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より，連立方程式は $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ と同じ． $\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

以上により

$\lambda = 1$ のとき，固有ベクトルの 1 つは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ のとき，固有ベクトルの 1 つは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ のとき，固有ベクトルの 1 つは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{R_1+(R_2+R_3)}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}}{=} (\lambda-1)\left|\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right| = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)^2 = 0 \qquad \therefore \quad \lambda = 1,\ -1,\ -1$$

$\lambda = 1$ のとき

連立方程式 $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を掃出法により解く．

$$(E - A \mid \boldsymbol{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3+R_2]{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より，連立方程式は $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ と同じ． $\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(t \in \mathbb{R})$

$\lambda = -1$ のとき

連立方程式 $(-E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を掃出法により解く．

$$(-E - A \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+2R_1]{R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より，連立方程式は $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ と同じ．

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

以上により

$\lambda = 1$ のとき，固有ベクトルの 1 つは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$（2 重解）のとき，固有ベクトルの 2 つは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$