２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年１２月２０日分

対角化の図形的意味

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda=-1,\ 4$

固有ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$P=(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$ とおくと

$P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}$ で $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}$

となった（前回参照）．

$$\therefore\quad A=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}P^{-1}\quad\cdots(*)$$

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ のとき

$$A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\14\end{pmatrix}$$

であるが，これを $(*)$ で理解してみよう．

(1) $P^{-1}\boldsymbol{x}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

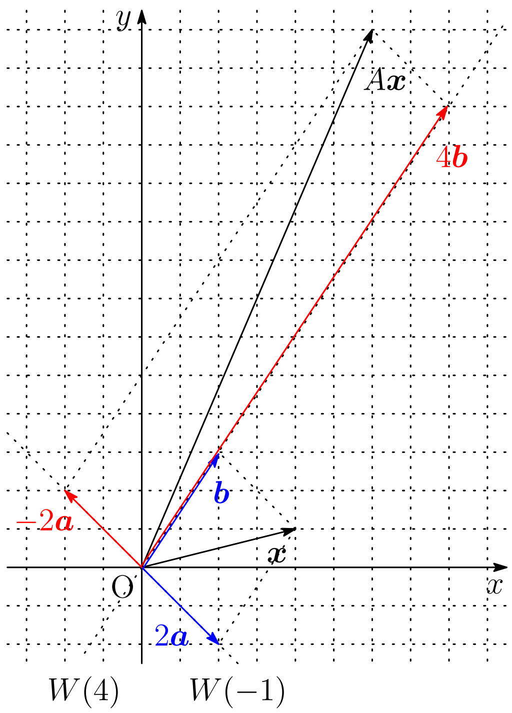
$$\therefore\quad \boldsymbol{x}=P\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

(2) $\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}P^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

(3) $A\boldsymbol{x}=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}P^{-1}\boldsymbol{x}=P\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

$=(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$



$W(-1)$：$\lambda=-1$ に対する固有空間
$W(4)$：$\lambda=4$ に対する固有空間

☆作図の方法

(1) $\boldsymbol{x}$ を $W(-1)$ と $W(4)$ に分解する．

$$\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

(2) $W(-1)$ と $W(4)$ に分解したベクトルを，それぞれ（固有値）$-1,\ 4$ 倍する．

$$2\boldsymbol{a}\to-2\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{b}\to4\boldsymbol{b}$$

(3) (2) のベクトルを合成したものが $A\boldsymbol{x}$ となる．

$$A\boldsymbol{x}=-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$$

※専門的に述べると，$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ により定まる $\mathbb{R}^2$ の一次変換の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ に対する表現行列が A であって，別の基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ に対する表現行列が $\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}$ となる（基底を変換すると，表現行列が簡単になる）．

後期試験（1/10 の授業時に実施）

$\boxed{1}$　3 次正方行列の逆行列（10/11 の例題参照）

$\boxed{2}$　2 次正方行列 A を，固有値と固有ベクトルから決定する問題

$\boxed{3}$　$\mathbb{R}^3$ における内積とノルム（内積とノルムの定義，直交条件を確認しておくこと）

$\boxed{4}$　$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ の 1 次結合で表す問題（11/15 の例題参照）

$\boxed{5}$　3 次正方行列の対角化（12/6，12/13 の例題 (3) 参照）