基礎数学教材（微分積分）

基本事項・問題

学籍番号		氏名	

はじめに

工学部の専門分野では，高度な数学が使われる．各学科で大学数学（微分積分，線形代数）の講義はあるが，こと微分積分に関しては高校数学の延長として捉えている場合がほとんどである．しかし，高校で微分積分を履修していない学生がいることも事実である．そのような学生に対しては「各自勉強しておくように」と突き放してしまうのが一番簡単だが，そのようなことは言わない．この講義では，一年間かけて高校数学（特に微分積分）の完全なる習得を目標とする．

目次

§０．関数とグラフ

１．関数

2 つの変数 x，y の間にある関係があって，x の値が定まると，それに対応して y の値がただ 1 つ定まるとき，y は x の**関数**であるという．このとき

$$y = f(x), \qquad y = g(x)$$

などの記号で表す．また，関数 $y = f(x)$ に対して，$f(a)$ は $x = a$ における y の値を表す．
※ y の値は x の値に応じて変わるので，x を**独立変数**，y を**従属変数**という．

２．定義域，値域，最大値，最小値

関数 $y = f(x)$ において，x の変域を**定義域**といい，x が定義域内のすべての値をとるときの $f(x)$ の値全体を**値域**という．また，値域に最大数，最小数があればそれらをそれぞれ**最大値**，**最小値**という．
※定義域としては，実数全体や区間のことが多い．

３．グラフ

関数 $y = f(x)$ に対して，座標平面上で点 $(x, f(x))$ の全体からなる集合を，この関数の**グラフ**という．

４．方程式とグラフ

方程式 $f(x) = g(x)$ の実数解が $x = a$
　$\Longleftrightarrow$ 関数 $y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフの共有点の x 座標が $x = a$

５．不等式とグラフ

不等式 $f(x) > g(x)$ の解
　$\Longleftrightarrow$ 関数 $y = f(x)$ のグラフが関数 $y = g(x)$ のグラフより上にあるような x の範囲

６．グラフの移動

関数 $y = f(x)$ のグラフに対して

移動	対応	式
x 軸方向に p 平行移動	$(x, y) \to (x-p, y)$	$y = f(x-p)$
y 軸方向に q 平行移動	$(x, y) \to (x, y-q)$	$y - q = f(x)$
x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動	$(x, y) \to (x-p, y-q)$	$y - q = f(x-p)$
x 軸に関して対称移動	$(x, y) \to (x, -y)$	$-y = f(x)$
y 軸に関して対称移動	$(x, y) \to (-x, y)$	$y = f(-x)$
原点に関して対称移動	$(x, y) \to (-x, -y)$	$-y = f(-x)$
直線 $y = x$ に関して対称移動	$(x, y) \to (y, x)$	$x = f(y)$

(1) 原点対称である関数を**奇関数**という．このとき，$f(-x) = -f(x)$ が成立する．
(2) y 軸対称である関数を**偶関数**という．このとき，$f(-x) = f(x)$ が成立する．

(3) $f(x+\alpha)=f(x)\cdots(*)$ を満たす $\alpha>0$ が存在するとき，この関数は**周期関数**であるといい，$(*)$ を満たす最小な α を，この関数の**周期**という．周期 α である周期関数に対して

$$f(x+\alpha\times n)=f(x) \quad (n \text{ は整数})$$

が成立する．

７．合成関数

関数 $y=f(x)$，$z=g(y)$ に対して $z=g(f(x))$ を考えることができるとき，この対応によって z は x の関数となる．この関数を，与えられた 2 つの関数の**合成関数**といい $z=(g\circ f)(x)$ で表す．

８．逆関数

関数 $y=f(x)$ において，定義域と値域が 1 対 1 に対応，即ち，

$$f(x_1)=f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1=x_2$$

を満たすとき，y に対して x がただ 1 つ定まるので，x は y の関数になる．この対応を $x=f^{-1}(y)$ とかくとき

$$x=(f^{-1}\circ f)(x), \qquad y=(f\circ f^{-1})(y)$$

が成り立つ．通常，独立変数に x を用いるので $y=f^{-1}(x)$ とかき直し，これを $y=f(x)$ の**逆関数**という．

※逆関数に関して，以下が成り立つ．

(1) $b=f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad a=f^{-1}(b)$

(2) 関数 $y=f(x)$ とその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，互いに直線 $y=x$ に関して対称.

９．媒介変数表示

変数 x，y が共にある変数 t の関数として

$$x=f(t), \qquad y=g(t) \qquad \cdots(**)$$

と表されているとき，$(**)$ を座標平面上の点 $(f(t),g(t))$ の全体からなる集合の**媒介変数表示**または**パラメーター表示**という．

※媒介変数表示される代表的な例に

円，だ円，サイクロイド，アステロイド，カージオイド

などがある．

§１．n 次関数

１．２次関数

2 次関数の表し方には

$$\begin{cases} \text{一般形} & y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \\ \text{基本形} & y = a(x-p)^2 + q \quad (a \neq 0) \end{cases}$$

がある．

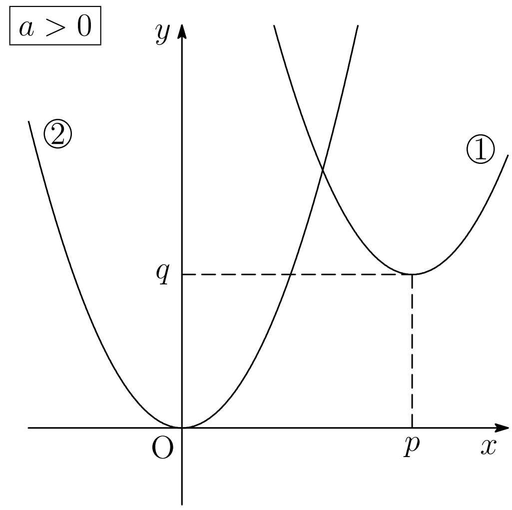
(1) $y = a(x-p)^2 + q \quad (a \neq 0) \cdots$ ① のグラフは，
$y = ax^2 \cdots$ ② のグラフを

$$x \text{ 軸方向に } p, \qquad y \text{ 軸方向に } q$$

平行移動したもので

$$\begin{cases} \text{軸の方程式は } x = p \\ \text{頂点の座標は } (p, q) \end{cases}$$

である．



(2) $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ は基本形 $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ に変形できる（この変形を**基本変形**または**平方完成**といい，一般形のグラフをかくときに必要）．

２．２次方程式

実係数 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \cdots (*)$ の解は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ で与えられる．よって，$D = b^2 - 4ac$ とおくとき

$$\begin{cases} D > 0 \iff (*) \text{ は異なる 2 実数解} \\ D = 0 \iff (*) \text{ は実重解} \\ D < 0 \iff (*) \text{ は異なる 2 虚数解} \end{cases}$$

と解の種類の判別ができる（D を $(*)$ の**判別式**という）．
また，$(*)$ の 2 解を α，β とするとき

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a} \qquad \text{（解と係数の関係）}$$

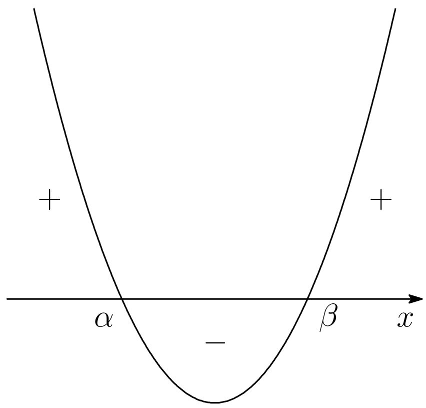
が成り立つ．
※ $\alpha^2 + \beta^2$，$\alpha^3 + \beta^3$，$(\alpha - \beta)^2$ など，α と β を入れ変えても式の値が変わらないものを**対称式**という．また，対称式の中で基本的な $\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ を**基本対称式**という．
一般に，**対称式は基本対称式で表せる**．具体的には，次のようなものがある．
(1) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
(2) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
(3) $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

３．２次不等式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0 \quad (a>0) \cdots (*)$ の判別式を D とする.

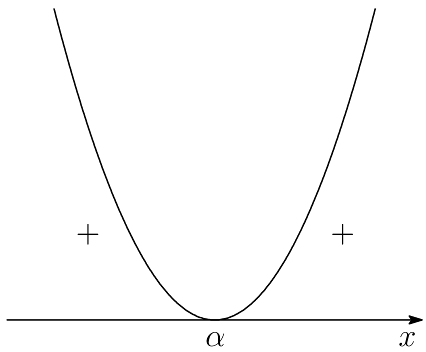
(1) $(*)$ が異なる 2 実数解 α, $\beta \quad (\alpha<\beta)$ をもつとき $(D>0)$

$$\begin{cases} ax^2+bx+c>0 & \Longleftrightarrow \quad x<\alpha,\ \beta<x \\ ax^2+bx+c<0 & \Longleftrightarrow \quad \alpha<x<\beta \\ ax^2+bx+c \geqq 0 & \Longleftrightarrow \quad x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x \\ ax^2+bx+c \leqq 0 & \Longleftrightarrow \quad \alpha \leqq x \leqq \beta \end{cases}$$



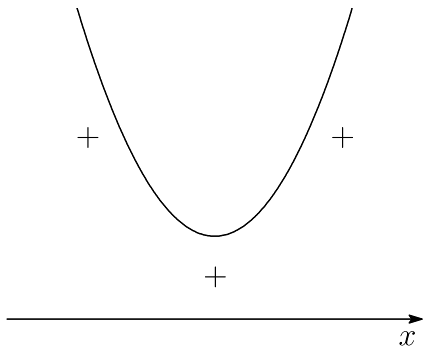
(2) $(*)$ が実重解 α をもつとき $(D=0)$

$$\begin{cases} ax^2+bx+c>0 & \Longleftrightarrow \quad x<\alpha,\ \alpha<x \\ ax^2+bx+c<0 & \Longleftrightarrow \quad \text{解なし} \\ ax^2+bx+c \geqq 0 & \Longleftrightarrow \quad \text{すべての実数} \\ ax^2+bx+c \leqq 0 & \Longleftrightarrow \quad x=\alpha \end{cases}$$



(3) $(*)$ が実数解をもたないとき $(D<0)$

$$\begin{cases} ax^2+bx+c>0 & \Longleftrightarrow \quad \text{すべての実数} \\ ax^2+bx+c<0 & \Longleftrightarrow \quad \text{解なし} \\ ax^2+bx+c \geqq 0 & \Longleftrightarrow \quad \text{すべての実数} \\ ax^2+bx+c \leqq 0 & \Longleftrightarrow \quad \text{解なし} \end{cases}$$



※ x^2 の係数が負のときは, x^2 の係数が正となるように変形してから上のことを使う.

４．n 次関数，n 次方程式，n 次不等式

(1) n 次関数：n 次関数の一般形は

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

で, このグラフは, 数 II の微分を学んだ後に詳しく考える.

(2) n 次方程式：3 次，4 次方程式にも解の公式があるが難しいし，5 次以上の方程式には解の公式がないことが知られている．この授業では，因数分解によって簡単に解が得られる場合を主に扱う．
(3) n 次不等式：2 次不等式と同様に，グラフを用いて解くことができる．

補足１．複素数
(1) 導入：人間は，自然数から始まり，整数，有理数，実数と数を拡張してきた．拡張の目的は，1 次もしくは特殊な 2 次方程式に解が存在するようにするためだった．しかしこのままでは，一般の実係数 2 次方程式に解が存在しない場合があるので，2 乗して負になるような新しい数を考え出した（実数と新しい数をあわせたものを複素数という）．これにより，実係数 2 次方程式には必ず複素数解が存在するとして扱うことが出来るようになった．
(2) 定義：2 乗して -1 になるものを i で表し，これを**虚数単位**という．

$$i^2 = -1$$

これを用いて，$a+bi$（a，b は実数）の形で表されるものを**複素数**といい，a，b をそれぞれこの複素数の**実部**，**虚部**という．特に，$b=0$ のとき $a+0i$ は実数 a を表す．また，$b \neq 0$ のとき $a+bi$ を**虚数**といい，$a=0$，$b \neq 0$ のとき $0+bi=bi$ を**純虚数**という．
(3) 複素数の相等：a，b，c，d が実数のとき，次が成り立つ．

$$\begin{cases} a+bi=c+di \quad \Longleftrightarrow \quad a=c,\ b=d \\ a+bi=0 \quad \Longleftrightarrow \quad a=b=0 \end{cases}$$

(4) 複素数の四則演算：i についての式とみて整理し，i^2 を -1 で置き換える．具体的には，a，b，c，d を実数としたとき
加法　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
減法　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
乗法　$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$
除法　$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{a+bi}{c+di}\cdot\dfrac{c-di}{c-di}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \quad (c^2+d^2 \neq 0)$
※ α，β を複素数とするとき，実数の場合と同様に，次が成り立つ．

$$\alpha\beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0$$

(5) 負の数の平方根：$a>0$ のとき $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ と定める．
※根号の中が負の数のときは，虚数単位 i を用いた形に書き換えて計算を行う．特に，a，$b>0$ のとき

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=(\sqrt{a}i)\cdot(\sqrt{b}i)=\sqrt{ab}\cdot i^2=-\sqrt{ab}$$

となることに注意しよう．

補足２．因数定理

(1) 整式の除法：x の整式 $f(x)$，$g(x)$ に対して

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

なる整式 $q(x)$，$r(x)$（ただし，$g(x)$ の次数 $> r(x)$ の次数）を求めることを割り算 $f(x) \div g(x)$ の実行といい，$q(x)$，$r(x)$ をそれぞれ $f(x) \div g(x)$ の**商**，**余り**という．特に $r(x) = 0$ となるとき，$f(x)$ は $g(x)$ で**割り切れる**という．

(2) **剰余の定理**：整式 $f(x)$ を $x - \alpha$ で割ったときの余りは $f(\alpha)$ に等しい．

(3) **因数定理**：整式 $f(x)$ に対して

$$f(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \text{ は } x - \alpha \text{ を因数にもつ}$$

※この定理は，高次方程式を解くときに役立つ（証明は，剰余の定理より容易に得られる）．

(4) 高次方程式の有理数解：整係数 n 次方程式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \cdots (*)$ の有理数解は

$$\pm\frac{a_n \text{ の正の約数}}{a_0 \text{ の正の約数}}$$

という形のものしかない．

※ $(*)$ が有理数解 $\dfrac{q}{p}$ をもつとき，$(*)$ の左辺は $px - q$ を因数にもつ．

問題１．１

次の関数のグラフをかき，軸の方程式と頂点の座標を求めよ.

(1) $y = x^2 - 4x + 4$
(2) $y = -2x^2 + 4x$
(3) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{5}{2}$
(4) $y = -2x^2 + 3x - 1$

問題１．２

次の方程式を解け.

(1) $x^2 - x - 6 = 0$
(2) $10x^2 - 7x - 12 = 0$
(3) $(\sqrt{2} + 1)x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$
(4) $2x^2 - 6x + 5 = 0$

問題１．３

次の不等式を解け.

(1) $x^2 - 3x + 2 > 0$
(2) $4x^2 - 4x + 1 \leqq 0$
(3) $2x + 1 > x^2$
(4) $-x^2 + 2x - 3 < 0$
(5) $|x^2 + 3x - 16| \leqq 12$
(6) $\begin{cases} x^2 - 4x + 2 \geqq 0 \\ 2x^2 + 7x - 4 \geqq 0 \end{cases}$

問題１．４

グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めよ.

(1) 軸が y 軸と平行で，3 点 $(-1, 7)$，$(0, -2)$，$(1, -5)$ を通る.
(2) 軸の方程式が $x = 4$ で，2 点 $(2, 1)$，$(5, -2)$ を通る.
(3) 2 点 $(0, 2)$，$(2, 8)$ を通り，x 軸に接する.
(4) 放物線 $y = 2x^2$ を平行移動した放物線で，点 $(1, 3)$ を通り，頂点が直線 $y = 2x - 3$ 上にある.
(5) 頂点の座標が $(2, -3)$ で，x 軸から切り取る線分の長さが 6 である.

問題１．５

次の関数の最大値と最小値を求めよ.

(1) $y = 2x^2 - 4x \quad (0 \leqq x \leqq 3)$
(2) $y = -x^2 + 4x - 1 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$
(3) $y = -3x^2 + 6x - 1 \quad (0 \leqq x < 2)$
(4) $y = |x^2 - 4| \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$
(5) $y = x^2 - 2ax + 2a + 3 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$
(6) $y = (x^2 - 6x)^2 + 12(x^2 - 6x) + 30 \quad (1 \leqq x \leqq 5)$

問題１．６

次の 2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ．また，共有点と頂点とで作られる多角形の面積も求めよ．

(1) $y = x^2 - 2x + 3$，$y = x + 4$　　(2) $y = x^2 + 2x - 3$，$y = -x^2 - 4x + 5$

問題１．７

次の方程式，不等式を解け．

(1) $3x^3 + x^2 - 8x + 4 = 0$　　(2) $3x^3 + x^2 - 8x + 4 < 0$

(3) $4x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = 0$　　(4) $4x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 7x - 2 \geqq 0$

(5) $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$　　(6) $x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = 0$

問題１．８

2 次方程式 $2x^2 - 4x + 3 = 0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の値を求めよ．

(1) $\alpha^2 + \beta^2$　　(2) $\alpha^3 + \beta^3$

(3) $(\alpha - \beta)^2$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$

(5) $\alpha^4 + \beta^4$　　(6) $\alpha^5 + \beta^5$

問題１．９

次の α に対して，$x = \alpha$ のときの $x^2 - 2x - 1$，$2x^3 - x^2 - 9x + 1$ の値を求めよ．

(1) $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$　　(2) $\alpha = 1 + 2i$

問題１．１０

$f(x) = |x^2 - 4x| - 2x$ について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフ G をかけ．

(2) 曲線 G 上の点 $(2, 0)$ における接線 l の方程式を求めよ．

(3) 曲線 G と接線 l との接点以外の共有点間の距離を求めよ．

解答１．１

(1) 軸 $x=2$，頂点 $(2,0)$，下に凸　(2) 軸 $x=1$，頂点 $(1,2)$，上に凸　(3) 軸 $x=3$，頂点 $(3,-2)$，下に凸　(4) 軸 $x=\dfrac{3}{4}$，頂点 $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{8}\right)$，上に凸

解答１．２

(1) $x=-2,\ 3$　(2) $x=-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{2}$　(3) $x=-1,\ \sqrt{2}-1$　(4) $x=\dfrac{3\pm i}{2}$

解答１．３

(1) $x<1,\ 2<x$　(2) $x=\dfrac{1}{2}$　(3) $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$　(4) すべての実数　(5) $-7\leqq x\leqq -4,\ 1\leqq x\leqq 4$　(6) $x\leqq -4,\ \dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\leqq x$

解答１．４

(1) $y=3x^2-6x-2$　(2) $y=(x-4)^2-3$　(3) $y=\dfrac{1}{2}(x+2)^2,\ y=\dfrac{9}{2}\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2$　(4) $y=2(x+1)^2-5,\ y=2(x-2)^2+1$　(5) $y=\dfrac{1}{3}(x+1)(x-5)$

解答１．５

(1) $x=3$ のとき最大値 6，$x=1$ のとき最小値 -2　(2) $x=2$ のとき最大値 3，$x=-1$ のとき最小値 -6　(3) $x=1$ のとき最大値 2，$x=0$ のとき最小値 -1　(4) $x=3$ のとき最大値 5，$x=2$ のとき最小値 0　(5) 最大値 $\begin{cases} -6a+19 & (a<2) \\ 2a+3 & (2\leqq a) \end{cases}$，　最小値 $\begin{cases} 2a+3 & (a<0) \\ -a^2+2a+3 & (0\leqq a<4) \\ -6a+19 & (4\leqq a) \end{cases}$

(6) $x=3$ のとき最大値 3，$x=3\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 -6

解答１．６

(1) $\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},\dfrac{11-\sqrt{13}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2},\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$，$\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$　(2) $(-4,5)$，$(1,0)$，30

解答１．７

(1) $x=-2,\ \dfrac{2}{3},\ 1$　(2) $x<-2,\ \dfrac{2}{3}<x<1$　(3) $x=-1,\ \dfrac{1}{2},\ 2$　(4) $x\leqq -1,\ x=\dfrac{1}{2},\ 2\leqq x$　(5) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{4},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$　(6) $x=-1,\ \dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2},\ \pm i$

解答１．８

(1) 1　(2) -1　(3) -2　(4) $\dfrac{2}{3}$　(5) $-\dfrac{7}{2}$　(6) $-\dfrac{11}{2}$

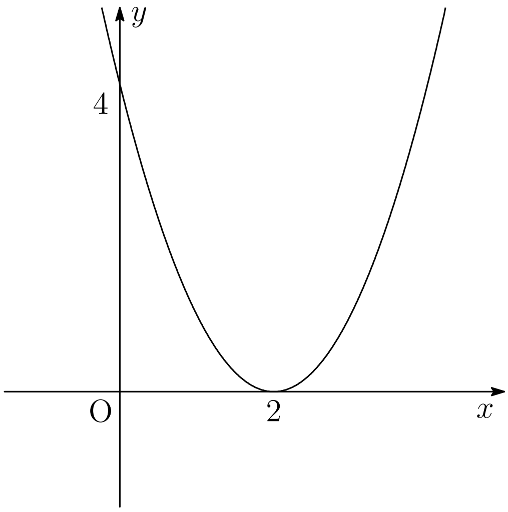
解答１．９

(1) 順に $0,\ 3-\sqrt{2}$　(2) 順に $-6,\ -27-26i$

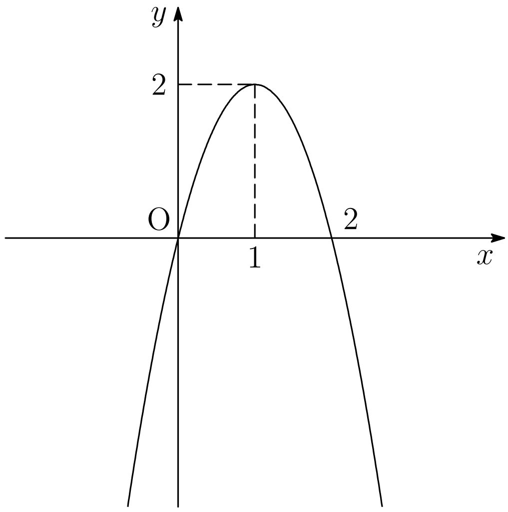
解答１．１０

(1) $y=\begin{cases} (x-3)^2-9 & (x\leqq 0,\ 4\leqq x) \\ -(x-1)^2+1 & (0<x<4) \end{cases}$ のグラフ　(2) $y=-2x+4$　(3) $4\sqrt{10}$

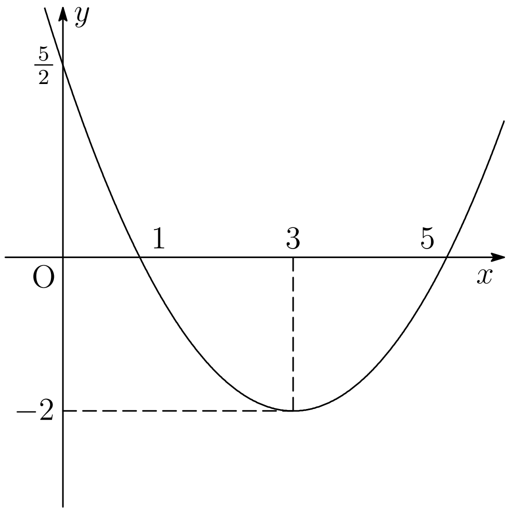
1.1 (1)



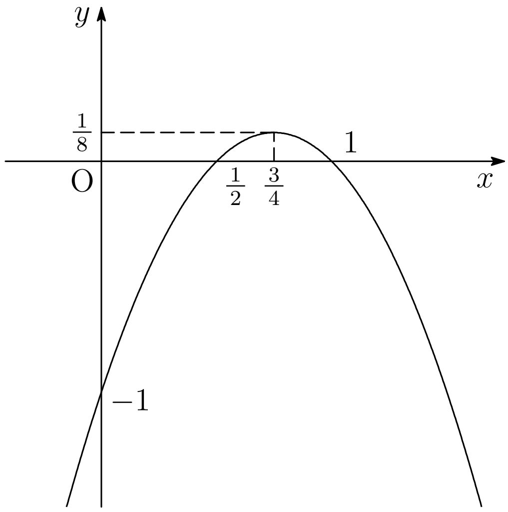
1.1 (2)



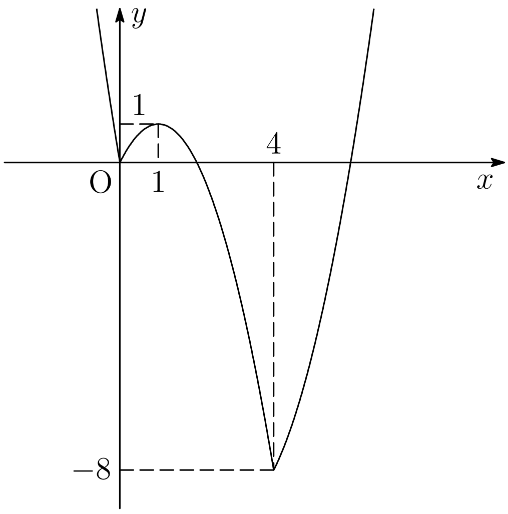
1.1 (3)



1.1 (4)



1.10 (1)



§２．指数関数

１．n 乗根と根号

(1) n が 2 以上の自然数のとき，n 乗して a になる数，つまり，

$$x^n = a$$

を満たす x を a の **n 乗根**という．
以下では，n 乗根は実数であるものだけを考える．
(i) n が奇数のとき：実数 a の n 乗根は 1 つだけある．これを $\sqrt[n]{a}$ とかく．
(ii) n が偶数のとき：正の数 a の n 乗根は正負 1 つずつある．その正の方を $\sqrt[n]{a}$，負の方を $-\sqrt[n]{a}$ とかく．
※ n が奇数のとき，$a > 0$ に対して

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

となる．また，n が偶数のとき，負の数の n 乗根は実数の範囲にはない．
(2) $a > 0$，$b > 0$ とし，m，n を自然数とすると，次が成り立つ．

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

２．指数法則と指数の拡張

(1) n が自然数であるとき，$a(>0)$ の n 個の積

$$a \times a \times \cdots \times a \quad (n\text{ 個の積})$$

を a^n と表し，a の**累乗**という．また，n をその**指数**という．
(2) 指数法則：$a > 0$，$b > 0$ とし，m，n を自然数とすると，次が成り立つ．

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

(3) 指数の拡張：$a > 0$ とし，n を自然数，m を整数とする．次のように定義し，指数を有理数まで拡張する．

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

特に

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

※このように定義するのは，指数を有理数まで拡張したとき，指数法則を成り立たせるためである．
(4) 有理数まで拡張された指数法則：$a > 0$，$b > 0$ とし，p，q を有理数とすると，次が成り立つ．

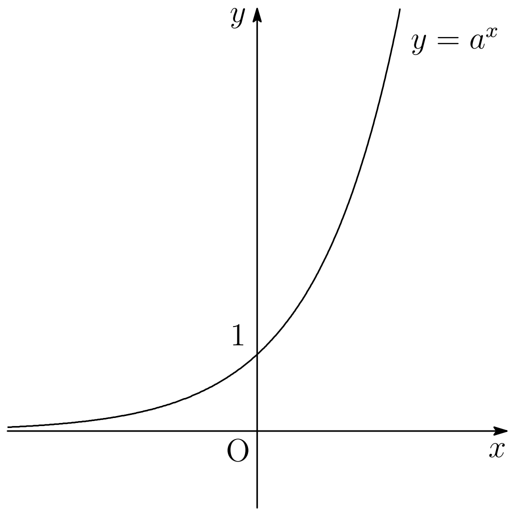
$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^p = a^p b^p, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

３．指数関数のグラフ

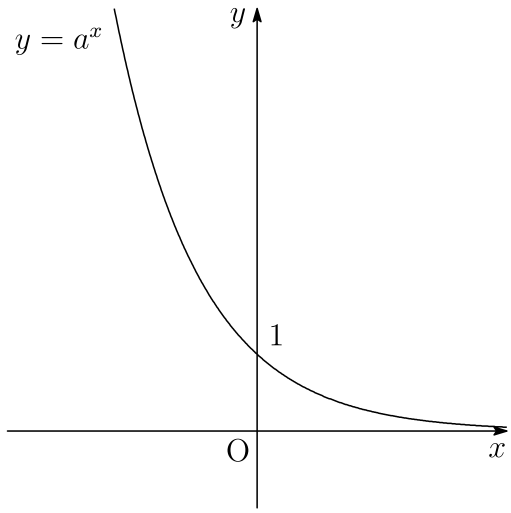
指数を有理数から実数まで拡張することができるので，a を**底**とする**指数関数** $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ が定義でき，そのグラフは下図のようになる．

※指数を有理数から実数まで拡張するのは，高等学校の範囲では正確に定義はできないが，有理数に対して点をプロットしていけば，なんとなくグラフはかける．指数を実数に変えても，指数法則は成立する．

・$a > 1$ のとき



・$0 < a < 1$ のとき



※指数関数の性質

(1) 定義域は実数全体で，値域は正の実数全体.

(2) グラフは点 $(0,1)$ を通り，x 軸が漸近線.

(3) 大小関係

・$a > 1$ のとき

$$\begin{cases} p < q & \iff & a^p < a^q \\ p \leqq q & \iff & a^p \leqq a^q \end{cases}$$

・$0 < a < 1$ のとき

$$\begin{cases} p < q & \iff & a^p > a^q \\ p \leqq q & \iff & a^p \geqq a^q \end{cases}$$

問題２．１

次の式を簡単にせよ．ただし，$a > 0$，$b > 0$ とする．

(1) $a^{\frac{3}{2}} \div a^{-\frac{1}{2}}$
(2) $\sqrt[3]{a^2} \times (a^3)^{-2}$
(3) $(a^{-\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{3}{4}}$
(4) $\sqrt{a} \times \sqrt[6]{a} \div \sqrt[3]{a^2}$
(5) $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a} \div \sqrt[6]{a}$
(6) $\sqrt[6]{a^3 b} \div \sqrt[3]{ab} \times \sqrt[3]{ab^2}$
(7) $(a^3 b^{-3})^{\frac{1}{2}} \times (a^{-2} b^2)^{\frac{1}{3}} \times (ab^5)^{\frac{1}{6}}$
(8) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2 b}\sqrt{a^7 b}}$

問題２．２

次の式を簡単にせよ．

(1) $4^{-\frac{3}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}} \div \sqrt{16^{-3}}$
(2) $\sqrt[4]{40} \times \sqrt[6]{3^7} \times \dfrac{1}{\sqrt[4]{360}} \div \sqrt[3]{9}$
(3) $\dfrac{8}{3}\sqrt[6]{9} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$
(4) $\sqrt[3]{54} + \dfrac{3}{2}\sqrt[6]{4} + \sqrt[3]{-\dfrac{1}{4}}$

問題２．３

$\sqrt{3}$，$9^{\frac{1}{3}}$，$\sqrt[5]{27}$，$81^{-\frac{1}{7}}$，$\dfrac{1}{\sqrt[8]{243}}$ を小さい順に並べよ．

問題２．４

次の方程式を解け．

(1) $2^x = 16$
(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 243$
(3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x = 8$
(4) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^x = \dfrac{1}{9}$
(5) $4^x = 8 \cdot 2^x$
(6) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x-1} = \dfrac{1}{125}$

問題２．５

次の不等式を解け．

(1) $2^x \geqq 4$
(2) $3^x \leqq 9$
(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geqq 32$
(4) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \leqq \dfrac{1}{243}$

問題２．６

次の方程式，不等式を解け．

(1) $2^{2x} - 2^{x+2} - 32 = 0$
(2) $3 \cdot 9^x + 5 \cdot 3^x - 2 = 0$
(3) $4^{x+1} - 65 \cdot 2^x + 16 = 0$
(4) $2^{6x+1} + 5 \cdot 2^{4x} - 11 \cdot 2^{2x} + 4 = 0$
(5) $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 \leqq 0$
(6) $3 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x - 1 > 0$
(7) $4^{x+1} - 5 \cdot 2^x + 1 > 0$
(8) $3^{2x+1} - 3^{x+2} - 3^x + 3 < 0$

問題２．７

$a^x + a^{-x} = 5\ (a > 0)$ のとき，次の値を求めよ.

(1) $a^{2x} + a^{-2x}$

(2) $a^{3x} + a^{-3x}$

(3) $a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x}$

(4) a^x

問題２．８

関数 $f(x) = 20(3^x + 3^{-x}) - 3(9^x + 9^{-x}) - 16$ の最大値と，最大値を与える x の値を求めよ.
ヒント：$t = 3^x + 3^{-x}$ とおき，$f(x)$ を t を用いて表す.

$\boxed{\text{解答２．１}}$

(1) a^2　(2) $a^{-\frac{16}{3}}$　(3) 1　(4) 1　(5) $a^{\frac{3}{4}}$　(6) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$　(7) a　(8) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

$\boxed{\text{解答２．２}}$

(1) 24　(2) 1　(3) $\sqrt[3]{3}$　(4) $4\sqrt[3]{2}$

$\boxed{\text{解答２．３}}$

$\dfrac{1}{\sqrt[8]{243}} < 81^{-\frac{1}{7}} < \sqrt{3} < \sqrt[5]{27} < 9^{\frac{1}{3}}$

$\boxed{\text{解答２．４}}$

(1) $x = 4$　(2) $x = -5$　(3) $x = -\dfrac{3}{2}$　(4) $x = \dfrac{2}{3}$　(5) $x = 3$　(6) $x = 2$

$\boxed{\text{解答２．５}}$

(1) $x \geqq 2$　(2) $x \leqq 2$　(3) $x \leqq -5$　(4) $x \geqq \dfrac{5}{2}$

$\boxed{\text{解答２．６}}$

(1) $x = 3$　(2) $x = -1$　(3) $x = -2,\ 4$　(4) $x = -\dfrac{1}{2},\ 0$　(5) $x \leqq 2$　(6) $x > -1$　(7) $x < -2,\ 0 < x$　(8) $-1 < x < 1$

$\boxed{\text{解答２．７}}$

(1) 23　(2) 110　(3) $\sqrt{7}$　(4) $\dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$\boxed{\text{解答２．８}}$

$x = \pm 1$ のとき最大値 $\dfrac{70}{3}$

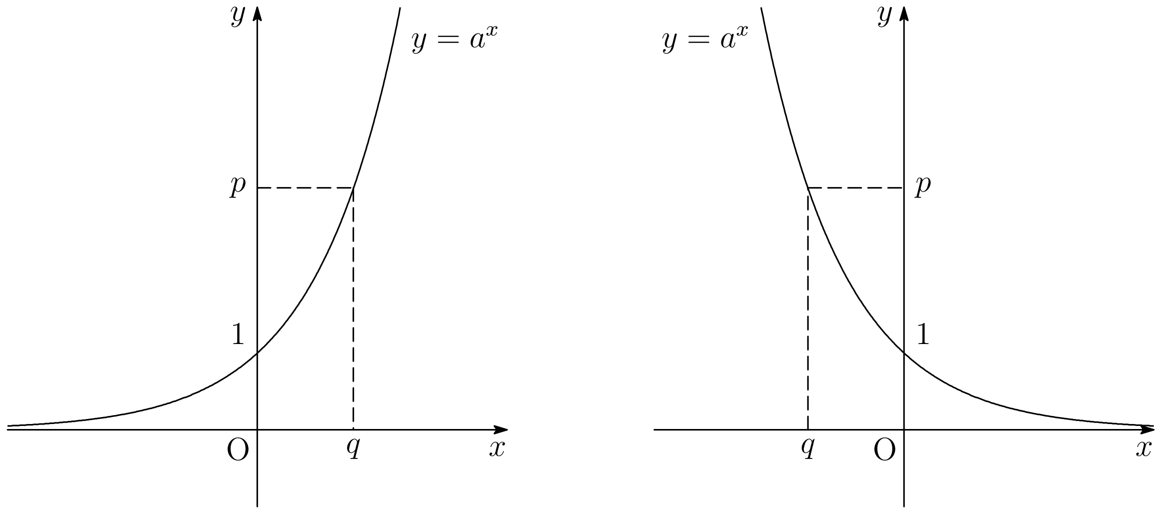
メモ

§３．対数関数

１．対数の定義

(1) $a>0$，$a\neq 1$ に対し，指数関数 $y=a^x$ のグラフは下図であった.

・$a>1$ のとき　　　　　　　　　　・$0<a<1$ のとき



グラフより，正の実数 p に対して，$p=a^q$ となる実数 q がただ 1 つ定まる．この q を a を**底**とする p の**対数**といい，$\log_a p$ で表す.

$$q=\log_a p$$

また，p をこの対数の**真数**という.

※ $\log_a p$ に対して

$$\begin{cases} \textbf{底の条件}：底\ a\ は\ a>0,\ a\neq 1 \\ \textbf{真数条件}：真数\ p\ は\ p>0 \end{cases}$$

が大前提なので，これらのチェックをしてから式変形などをする.

(2) 指数と対数の関係：$a>0$，$a\neq 1$ のとき

$$p=a^q \quad \Longleftrightarrow \quad q=\log_a p$$

(3) 対数の性質：$a>0$，$a\neq 1$ とする．$M>0$，$N>0$ と実数 k に対して，次が成り立つ.

(i) $\log_a 1=0$

(ii) $\log_a a=1$

(iii) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(iv) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(v) $\log_a M^k=k\log_a M$

(vi) $p=a^{\log_a p}$

(4) **底の変換公式**：$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a\neq 1$，$c\neq 1$ のとき

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

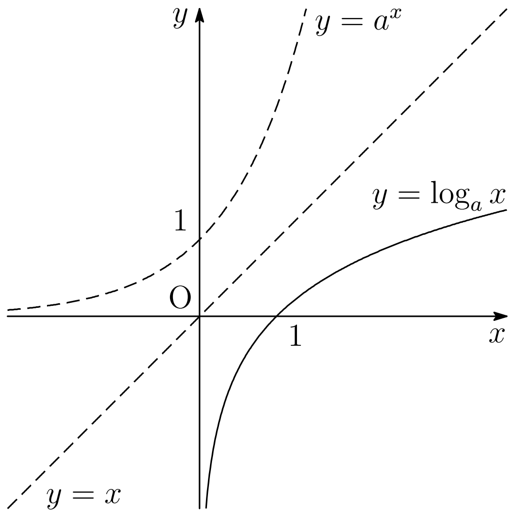
が成り立つ.

※この公式は，底が異なる対数を扱う時に用いる.

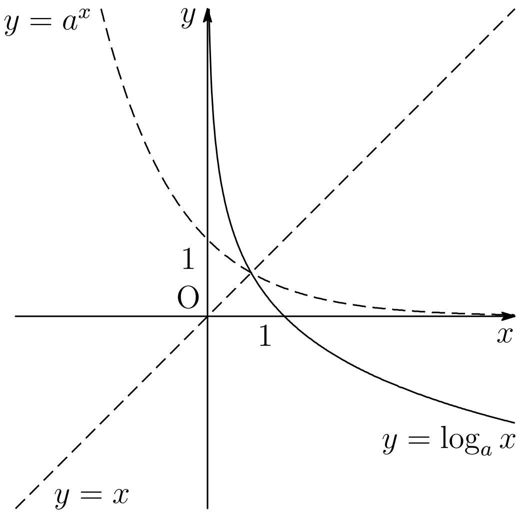
２．対数関数のグラフ

$a>0$，$a \neq 1$ とする．**対数関数** $y=\log_a x$ のグラフは下図のようになる．

・$a>1$ のとき



・$0<a<1$ のとき



※対数関数 $y=\log_a x$ の性質

(1) 定義域は正の実数全体，値域は実数全体.

(2) グラフは点 $(1,0)$ を通り，y 軸が漸近線.

(3) 大小関係

・$a>1$ のとき

$$\begin{cases} 0<p<q & \Longleftrightarrow & \log_a p<\log_a q \\ 0<p \leqq q & \Longleftrightarrow & \log_a p \leqq \log_a q \end{cases}$$

・$0<a<1$ のとき

$$\begin{cases} 0<p<q & \Longleftrightarrow & \log_a p>\log_a q \\ 0<p \leqq q & \Longleftrightarrow & \log_a p \geqq \log_a q \end{cases}$$

(4) $y=\log_a x$ のグラフは，$y=a^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称．つまり，$y=\log_a x$ と $y=a^x$ は互いに他の逆関数である．

３．常用対数

10 を底とする対数を**常用対数**という．

(1) 自然数 N が n 桁の数 $(10^{n-1} \leqq N<10^n)$ であるための必要十分条件は

$$n-1 \leqq \log_{10} N<n$$

である．

(2) 1 より小さい正の数 M が小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れる $(10^{-n} \leqq M<10^{-n+1})$ ための必要十分条件は

$$-n \leqq \log_{10} M<-n+1$$

である．

問題３．１

次の式を簡単にせよ.

(1) $\log_2 \dfrac{8}{3} + \log_2 6$

(2) $\log_5 \sqrt{45} + \log_5 \dfrac{5}{3}$

(3) $\log_3 18 - \log_3 2$

(4) $\log_2 12 - \log_2 3\sqrt{2}$

(5) $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} - \log_2 \sqrt[6]{\dfrac{3}{2}}$

(6) $\dfrac{1}{3}\log_{10} 8 + \log_{10} \dfrac{3}{2} - \log_{10} \dfrac{3}{10}$

(7) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 4$

(8) $\log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 8$

(9) $(\log_5 3 + \log_{25} 9)(\log_9 5 - \log_3 25)$

(10) $(\log_3 4 + \log_9 4)(\log_2 27 - \log_4 9)$

問題３．２

$\sqrt{8}$ と $2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{2}} 9}$ の大小関係を調べよ.

問題３．３

次の方程式を解け.

(1) $\log_3 x = -2$

(2) $\log_3 x = \dfrac{1}{2}$

(3) $\log_x 25 = 2$

(4) $\log_x 16 = 4$

(5) $2^{\log_2 \sqrt{5}} = x$

(6) $3^{2\log_3 2} = x$

問題３．４

次の不等式を解け.

(1) $\log_2 x > 2$

(2) $\log_3(x+1) \leqq -1$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqq 2$

(4) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > -1$

(5) $\log_2(x-1) \geqq \log_2(2x-3)$

(6) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$

問題３．５

次の方程式，不等式を解け.

(1) $\log_3 x - \log_3(x-1) = 2$

(2) $\log_2(3-x) + \log_2(x+2) = 2$

(3) $\log_2 x + \log_4(x+3) = 1$

(4) $\log_2 5(2-x)^2 = 2\log_4(x^2-3x+2)$

(5) $\log_{10}(x+1) + \log_{10}(x-2) < 1$

(6) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) + \log_{\frac{1}{2}}(x-6) > 1$

(7) $2\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geqq \log_{\frac{1}{3}}(x+5)$

(8) $\log_4(9-x) - \log_2(x+3) + 2 > 0$

(9) $\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_2(1-x) = 0 \\ y = -x^2 + 4x + 1 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} \log_2(x-2) + \log_2(x-5) \leqq 1 + 2\log_2 3 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+3) \leqq -2 \end{cases}$

問題３．６

次の関数の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの x の値も求めよ．

(1) $y = (\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 4 \quad (1 \leqq x \leqq 9)$
(2) $y = \log_2(4x^4 + 12x^2 + 9) - \log_2(2x^2 + 1)$

問題３．７

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として，次の問に答えよ．

(1) 18^{20} は何桁の整数か.
(2) $\left(\dfrac{8}{45}\right)^8$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか.

問題３．８

xy 平面上で，条件

$$\log_2 x \leqq 1 + \log_2 y \leqq \log_2 x + \log_2(6 - x)$$

を満たす点 (x, y) 全体のなす領域を D とする．

(1) 領域 D を図示せよ．
(2) 点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，$x + y$ の最大値と，最大値をとる x，y の値を求めよ．

$\boxed{\text{解答３．１}}$

(1) 4　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) 2　(4) $\dfrac{3}{2}$　(5) 1　(6) 1　(7) 2　(8) $\dfrac{3}{2}$　(9) -3　(10) 6

$\boxed{\text{解答３．２}}$

$\sqrt{8} > 2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{2}} 9}$

$\boxed{\text{解答３．３}}$

(1) $x = \dfrac{1}{9}$　(2) $x = \sqrt{3}$　(3) $x = 5$　(4) $x = 2$　(5) $x = \sqrt{5}$　(6) $x = 4$

$\boxed{\text{解答３．４}}$

(1) $x > 4$　(2) $-1 < x \leqq -\dfrac{2}{3}$　(3) $x \geqq \dfrac{1}{4}$　(4) $-1 < x < 2$　(5) $\dfrac{3}{2} < x \leqq 2$　(6) $\dfrac{2}{3} < x < 3$

$\boxed{\text{解答３．５}}$

(1) $x = \dfrac{9}{8}$　(2) $x = -1,\ 2$　(3) $x = 1$　(4) $x = \dfrac{9}{4}$　(5) $2 < x < 4$　(6) $6 < x < \dfrac{10 + \sqrt{6}}{2}$
(7) $1 < x \leqq 4$　(8) $-3 < x < 5$　(9) $(x, y) = (0, 1),\ (3 - \sqrt{5}, -1 + 2\sqrt{5})$　(10) $6 \leqq x \leqq 8$

$\boxed{\text{解答３．６}}$

(1) $x = 1$ のとき最大値 4，$x = 3\sqrt{3}$ のとき最小値 $\dfrac{7}{4}$　(2) 最大値なし，$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 3

$\boxed{\text{解答３．７}}$

(1) 26 桁　(2) 小数第 7 位

$\boxed{\text{解答３．８}}$

(1) 不等式 $\dfrac{1}{2}x \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}(x-3)^2 + \dfrac{9}{2}$ の表す領域で，原点 $(0, 0)$ を除く　(2) $(x, y) = (4, 4)$ のとき最大値 8

メモ

§４．三角関数

０．弧度法への移行

数 II で扱う三角関数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ において，x は $30°$，$45°$，$180°$ 等（このような表し方を**度数法**表現という）であった．しかし，このままでは我々の目的である微分積分を勉強するのには都合が悪い．なぜならば，高校で扱う関数のうち

n 次関数，指数関数，対数関数等は，実数から実数への対応

となっているが,

三角関数だけは，度数から実数への対応

となっていて，例えば，関数 $y=\sin x$，$y=x$ のグラフの共有点の座標を求めることすらできないのである．したがって，三角関数も実数から実数への対応としてあげることができれば，すべて同一の舞台で扱うことができるようになるわけである．つまり，最初に考えなければならないことは

対応 “度数 $\longleftrightarrow$ 実数（弧度）” の決定

である．

１．弧度法

半径 1，中心角 $\theta°$ の扇形の弧の長さを x とすると

$$x=2\pi\times\frac{\theta}{360}=\frac{\pi}{180}\theta \quad \cdots(*)$$

であった（中学）．これより，中心角（度数）と弧の長さ（実数）が 1 対 1 の関係（特に，比例関係）にあることが分かる．よって，$(*)$ により

対応 “度数 $\longleftrightarrow$ 実数” の決定

ができたわけである．そこで，$(*)$ により定まる実数 x を度数 $\theta°$ の**弧度法**表現（弧の長さにより角度を表すから弧度法という）といい，今後は三角関数は弧度法を使うことにする．
※代表的な対応

$\theta°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

２．角の表し方

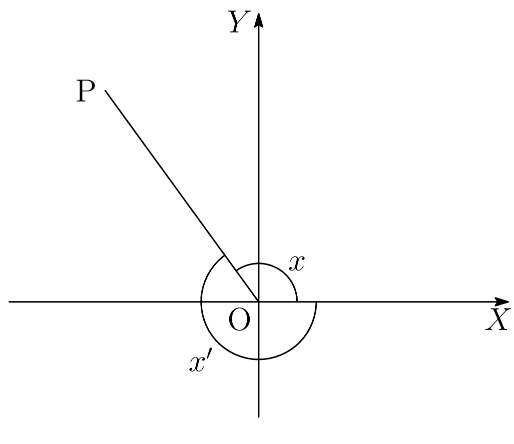
XY 平面上の原点 O とは異なる点 P に対して，X 軸の正の部分と線分 OP とのなす角は

$$\begin{cases}\text{左回りを正}\\ \text{右回りを負}\end{cases}$$

として角を表す．
例えば，右図において，X 軸の正の部分と線分 OP とのなす角は

$$x,\quad -x'$$

の 2 通りの表し方がある．



$0\leqq x,\ x'<2\pi$

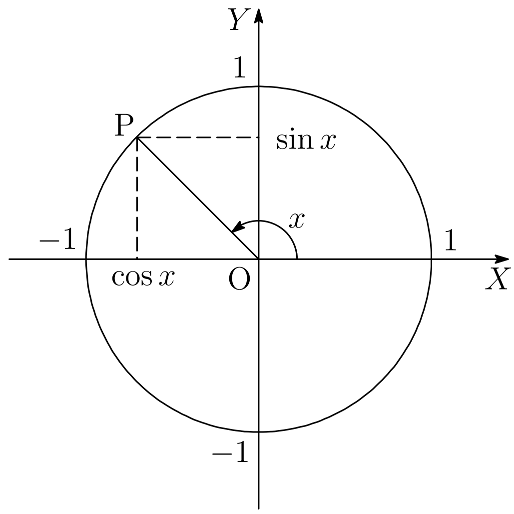
※ X 軸の正の部分と線分 OP とのなす角が x $(0 \leqq x < 2\pi)$ のとき，なす角の**一般角**は

$$x + 2\pi \times n \qquad (n \text{ は整数})$$

で与えられる.

3．三角関数

原点を中心とした半径 1 の円上の点 P を考える. X 軸の正の部分と線分 OP とのなす角を x とするとき，点 $\mathrm{P}(X, Y)$ の X 座標，Y 座標をそれぞれ $\cos x$，$\sin x$ と定める.



$$\cos x = X, \quad \sin x = Y$$

また，$\cos x \neq 0$ のとき

$$\tan x = \frac{Y}{X} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

と定める（$\tan x$ は線分 OP の傾きを表す）.

※ (1) 三角関数を上のように定義するのは，三角関数が三角比（数 I）の自然な拡張になるようにするためである.

(2) 三角関数の相互関係

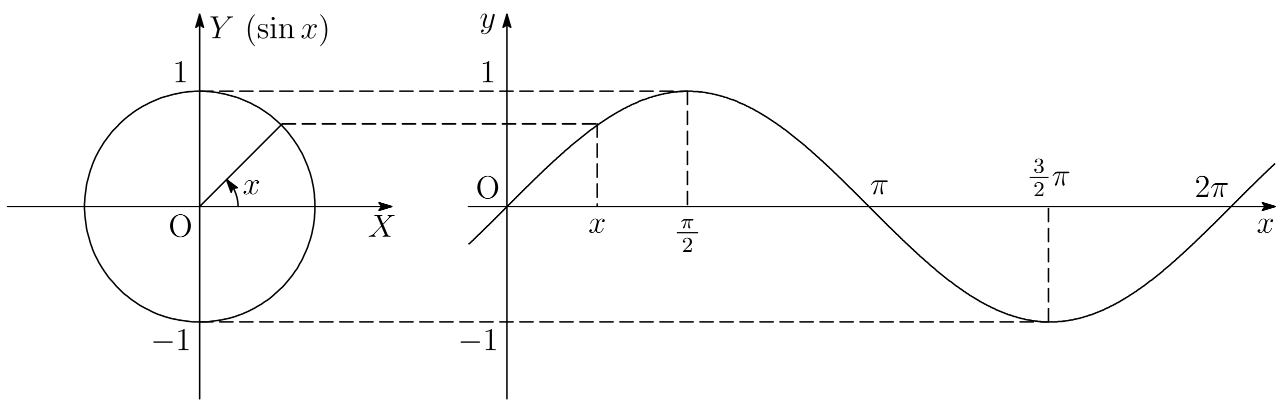
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(3) 代表的な値

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	定義されない	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	定義されない	0

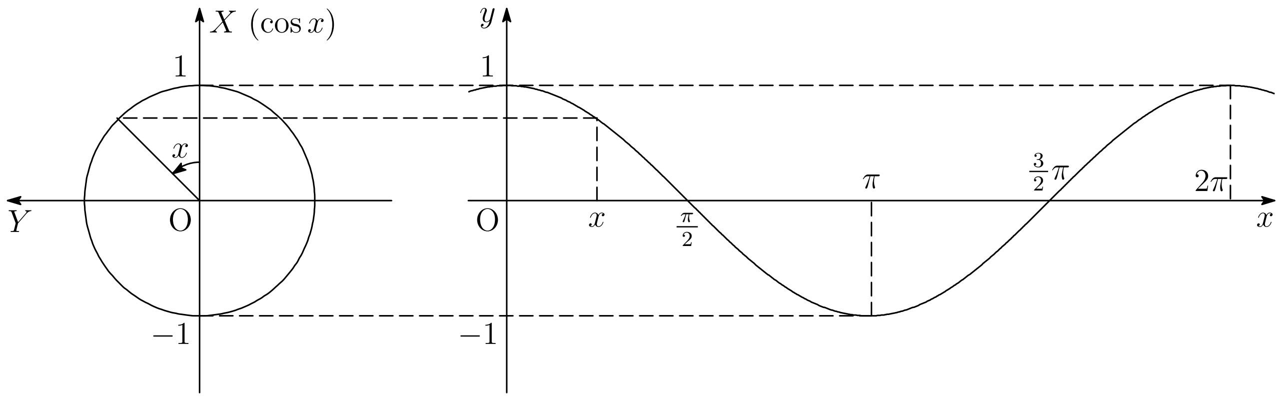
4．三角関数のグラフ

(1) $y = \sin x$



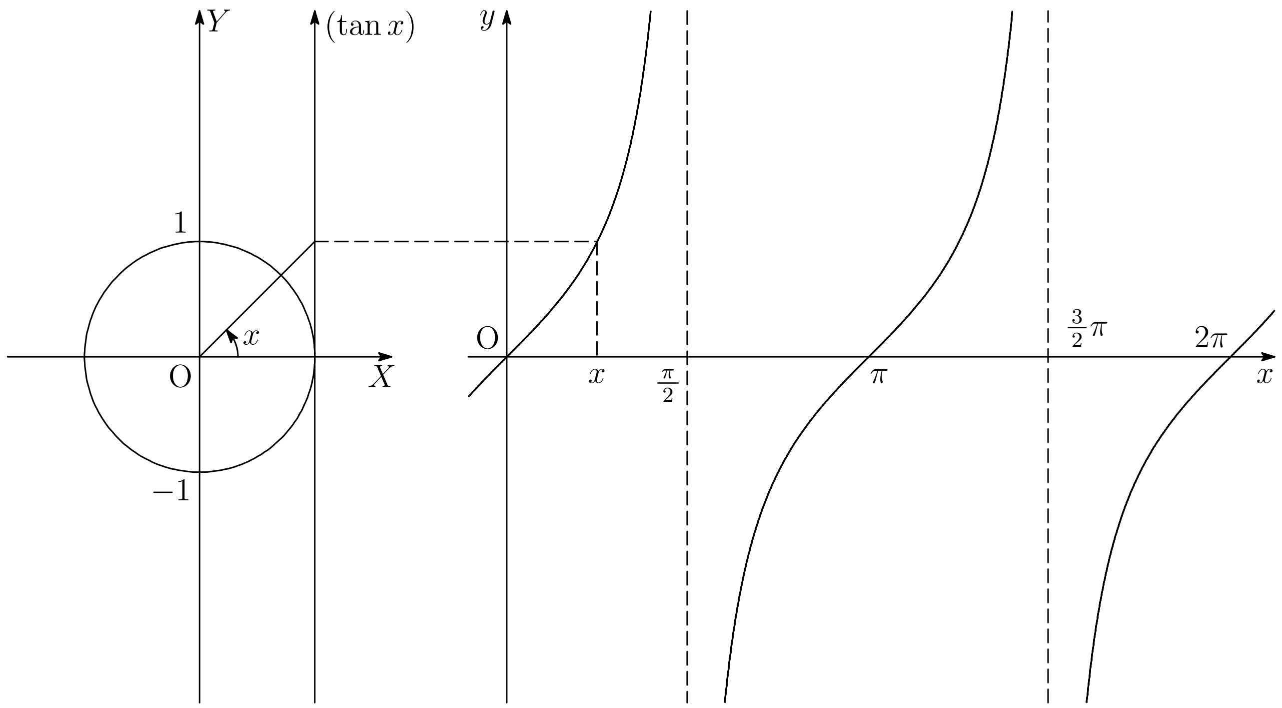
※三角関数 $y = \sin x$ の性質
(i) 定義域は実数全体で，値域は -1 以上 1 以下，即ち，$-1 \leqq \sin x \leqq 1$.
(ii) 奇関数で，周期は 2π.

(2) $y = \cos x$



※三角関数 $y = \cos x$ の性質
(i) 定義域は実数全体で，値域は -1 以上 1 以下，即ち，$-1 \leqq \cos x \leqq 1$.
(ii) 偶関数で，周期は 2π.

(3) $y = \tan x$



※三角関数 $y = \tan x$ の性質
(i) 定義域は $\dfrac{\pi}{2} + \pi \times n$（$n$ は整数）以外の実数全体で，値域は実数全体.
(ii) 奇関数で，周期は π.
(iii) 直線 $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi \times n$（$n$ は整数）が漸近線.

５．三角関数の変換公式

(1) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\tan(-x) = -\tan x$

(2) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan x}$

(3) $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\tan(x + \pi) = \tan x$

(4) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\tan(x + 2\pi) = \tan x$

６．加法定理

(1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

(3) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(5) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

(6) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

７．加法定理の応用

(1) 2 倍角の公式：加法定理の (1)，(3)，(5) で $\alpha = \beta = x$ とすることにより得られる．

$$\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \quad \cdots (*) \\ \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{cases}$$

(2) 3 倍角の公式

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

(3) 半角の公式：$(*)$ より得られる．

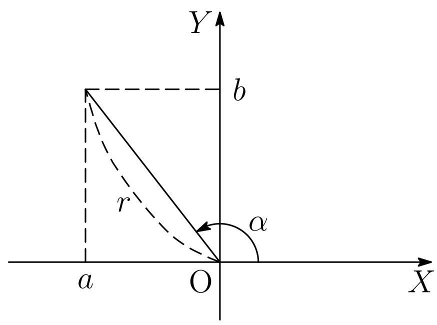
$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \qquad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \qquad \tan^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

(4) 三角関数の合成

$$a\sin x + b\cos x = r\sin(x + \alpha)$$

が成り立つ．ただし，r，α は右図のようなもので

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{a}{r}, \quad \sin\alpha = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$



を満たす．

※物理的には，2 つの波 $a\sin x$ と $b\cos x$ が重なり合うと，再び波 $r\sin(x + \alpha)$ になるということを表している．

問題４．１

次の表を完成させよ.

$\theta°$	$-180°$	$-150°$	$-135°$	$-120°$	$-90°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$210°$	$300°$
x	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\sin x$	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
$\cos x$	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)
$\tan x$	(31)	(32)	(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)	(39)	(40)

問題４．２

$0 \leqq x < 2\pi$ において，次の方程式を解け.

(1) $\sin x = \dfrac{1}{2}$

(2) $\sin x = 1$

(3) $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

(6) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(7) $\tan x = 1$

(8) $\tan x = -\sqrt{3}$

問題４．３

$-\pi < x < \pi$ において，次の不等式を解け.

(1) $\sin x \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin x < -\dfrac{1}{2}$

(3) $\sin x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\cos x \geqq \dfrac{1}{2}$

(5) $\cos x > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(6) $\cos x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(7) $\tan x \geqq -1$

(8) $\tan x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

問題４．４

(1) $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ $(0 < x < \pi)$ のとき，$\sin x \cos x$，$\cos x - \sin x$ の値を求めよ.

(2) α は第 1 象限の角，β は第 3 象限の角で，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$ のとき，

$$\sin(\alpha+\beta), \quad \tan(\beta-\alpha), \quad \cos 2\alpha, \quad \sin 2\beta, \quad \cos\frac{\beta}{2}, \quad \tan\frac{\beta}{2}$$

の値を求めよ.

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ のとき，$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ を t で表せ.

問題4．5

次の式を $r\sin(x+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする．

(1) $\sin x+\cos x$
(2) $\sin x-\cos x$
(3) $\sqrt{3}\sin x+\cos x$
(4) $\sin x-\sqrt{3}\cos x$
(5) $3\sin x-\sqrt{3}\cos x$
(6) $3\cos x-\sqrt{3}\sin x$

問題4．6

$0\leqq x<2\pi$ において，次の方程式，不等式を解け．

(1) $\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$
(2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$
(3) $\cos 2x-3\cos x+2=0$
(4) $2\sin^2 x-(2-\sqrt{3})\cos x+\sqrt{3}-2=0$
(5) $4-\sqrt{3}-2(\sqrt{3}-1)\sin x-4\cos^2 x\leqq 0$
(6) $\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=1$
(7) $\cos^2 x-2\cos x-\sin^2 x+2\sin x\geqq 0$
(8) $\frac{1}{3}\tan 2x\leqq\tan x$
(9) $(2+\sqrt{3})\sin x+(1+\sqrt{3})\cos x\geqq|\sin x|$
(10) $-2\cos^2 x\sin x-5\cos^2 x+3\sin x+3\geqq 0$

問題4．7

(1) 3 倍角の公式 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$，$\cos 3x=-3\cos x+4\cos^3 x$ を証明せよ．
(2) $x=\frac{\pi}{5}$ とすると $3x=\pi-2x$ が成り立つことに注意して，$\cos\frac{\pi}{5}$ の値を求めよ．

問題4．8

$0\leqq x\leqq\pi$ において，次の関数の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの x の値も求めよ．

(1) $y=\sin x-\cos x$
(2) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$
(3) $y=\cos 2x+2\cos x-1$
(4) $y=2\sin x-\cos 2x$

問題4．9

$0\leqq x\leqq\pi$ において，関数 $y=3\sin 2x+a(\sin x+\cos x)+1$ を考える．ただし，a は正の定数とする．
(1) $t=\sin x+\cos x$ とおくとき，y を t で表せ．
(2) t のとりうる値の範囲を求めよ．
(3) y の最大値 $M(a)$，最小値 $m(a)$ を求めよ．

解答４．１

(1) $-\pi$　(2) $-\frac{5}{6}\pi$　(3) $-\frac{3}{4}\pi$　(4) $-\frac{2}{3}\pi$　(5) $-\frac{\pi}{2}$　(6) $-\frac{\pi}{3}$　(7) $-\frac{\pi}{4}$　(8) $-\frac{\pi}{6}$　(9) $\frac{7}{6}\pi$　(10) $\frac{5}{3}\pi$　(11) 0　(12) $-\frac{1}{2}$　(13) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　(14) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(15) -1　(16) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(17) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　(18) $-\frac{1}{2}$　(19) $-\frac{1}{2}$　(20) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(21) -1　(22) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(23) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　(24) $-\frac{1}{2}$　(25) 0　(26) $\frac{1}{2}$　(27) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　(28) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(29) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(30) $\frac{1}{2}$　(31) 0　(32) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　(33) 1　(34) $\sqrt{3}$　(35) 定義されない　(36) $-\sqrt{3}$　(37) -1　(38) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　(39) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　(40) $-\sqrt{3}$

解答４．２

(1) $x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$　(2) $x=\frac{\pi}{2}$　(3) $x=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$　(4) $x=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$　(5) $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$　(6) $x=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$　(7) $x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$　(8) $x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

解答４．３

(1) $\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$　(2) $-\frac{5}{6}\pi<x<-\frac{\pi}{6}$　(3) $-\pi<x\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq x<\pi$　(4) $-\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$　(5) $-\frac{3}{4}\pi<x<\frac{3}{4}\pi$　(6) $-\pi<x\leqq-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\leqq x<\pi$　(7) $-\pi<x<-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}\leqq x<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\leqq x<\pi$　(8) $-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{6}\pi$

解答４．４

(1) 順に $-\frac{3}{8},\ -\frac{\sqrt{7}}{2}$　(2) 順に $-\frac{3\sqrt{5}+8}{15},\ \frac{25\sqrt{5}-54}{22},\ -\frac{1}{9},\ \frac{24}{25},\ \pm\frac{1}{\sqrt{5}},\ -2$　(3) 順に $\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1-t^2}$

解答４．５

(1) $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$　(2) $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$　(3) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$　(4) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$　(5) $2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$　(6) $2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

解答４．６

(1) $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{11}{9}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$　(2) $\frac{\pi}{12}\leqq x\leqq\frac{5}{12}\pi$　(3) $x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$　(4) $x=\frac{\pi}{6},\ \pi,\ \frac{11}{6}\pi$　(5) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi\leqq x<2\pi$　(6) $x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi$　(7) $\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{5}{4}\pi$　(8) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi<x\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \pi\leqq x\leqq\frac{7}{6}\pi,\ \frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<x\leqq\frac{11}{6}\pi$　(9) $0\leqq x\leqq\frac{3}{4}\pi,\ \frac{11}{6}\pi\leqq x<2\pi$　(10) $\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{5}{6}\pi,\ x=\frac{3}{2}\pi$

解答４．７

(1) $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x\cos^2 x + (1-2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x(1-\sin^2 x) + (1-2\sin^2 x)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x$，$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x\cos x = (2\cos^2 x-1)\cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x = -3\cos x + 4\cos^3 x$　(2) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

解答４．８

(1) $x=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき最大値 $\sqrt{2}$，$x=0$ のとき最小値 -1　(2) $x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大値 2，$x=0$ のとき最小値 -1　(3) $x=0$ のとき最大値 2，$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{5}{2}$　(4) $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 3，$x=0$，π のとき最小値 -1

解答４．９

(1) $3t^2+at-2$　(2) $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$　(3) $M(a)=\sqrt{2}a+4$，$m(a)=\begin{cases} -\dfrac{a^2}{12}-2 & (0<a\leqq 6) \\ -a+1 & (6<a) \end{cases}$

§５．数列・関数の極限

１．数列の極限

(1) 数列 $\{a_n\}$ に対して，n を限りなく大きくしたとき，a_n の値がある定数 a に近づくならば，数列 $\{a_n\}$ は**極限値** a に**収束する**といい

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{または} \quad a_n \to a \ \ (n \to \infty)$$

とかく．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，数列 $\{a_n\}$ は**発散する**という．特に，$n \to \infty$ のとき a_n の値が限りなく大きくなっていくならば，数列 $\{a_n\}$ は（**正の**）**無限大に発散する**といい

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad a_n \to \infty \ \ (n \to \infty)$$

とかく．また，$n \to \infty$ のとき a_n の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなっているならば，数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散する**といい

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{または} \quad a_n \to -\infty \ \ (n \to \infty)$$

とかく．

※代表的な極限値

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \infty \quad (\alpha > 0)$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} -n^\alpha = -\infty \quad (\alpha > 0)$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad (-1 < r < 1), \qquad 1 \quad (r = 1), \qquad$ 発散 $\quad (r > 1,\ r \leqq -1)$

(v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は存在する（証明は難しい）ので，この極限値を “e” で表す．この値は $e = 2.718281828\cdots$ で，無理数であることが知られている．また，この e を底とする対数を**自然対数**といい，$\log_e x$ を単に $\log x$ と底 e を省略してかく習慣がある．

２．公式

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b$，$k$ を定数とするとき，次の公式が成り立つ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ （複号同順）

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} k a_n = ka$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$

※はさみうちの定理

$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$ も存在し，すべての極限値は等しい．

３．級数

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，新しい数列 $\{S_n\}$ が考えられる．数列 $\{S_n\}$ が実数 S に収束するとき，**級数**（無限級数，無限和ともいう）

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

は**収束する**といい，S_n を級数の部分和，S を級数の和という．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

また，数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，級数は**発散する**という．
(2) 等比数列の無限和を**等比級数**（無限等比級数ともいう）といい，次が成り立つ．ただし，$a \neq 0$ とする．

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & (-1 < r < 1) \\ \text{発散} & (r \leqq -1,\ 1 \leqq r) \end{cases}$$

4．関数の極限

(1) x が a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に近づくならば，この α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**といい

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha \ \ (x \to a)$$

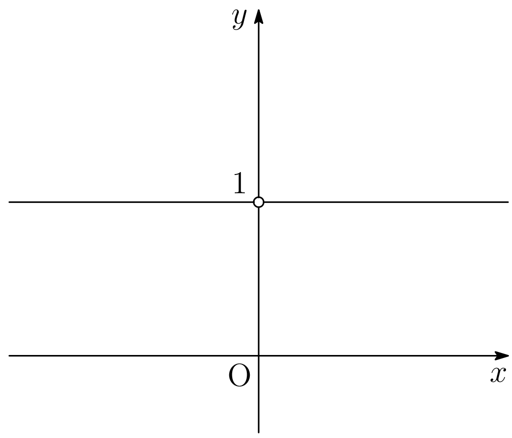
と書く．
※極限値は $f(a)$ が定義されていない場合でも考えられる．
例：$f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ \text{定義されない} & (x = 0) \end{cases}$$

で定義すると，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになる．このとき，グラフより

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

が成り立つ．



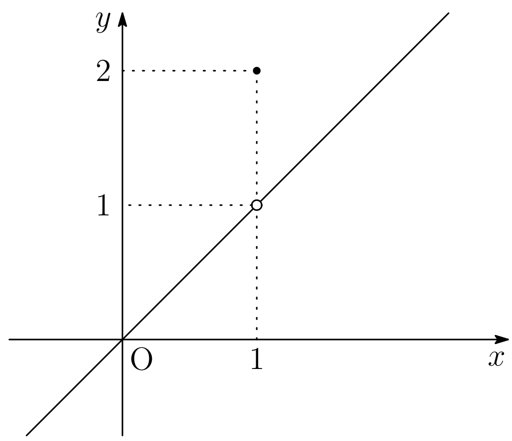
※ $f(a)$ が定義される場合でも，$f(a) = \alpha$ となるわけではない．
例：$f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$$

で定義すると，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになる．このとき，グラフより

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq 2 = f(1)$$

が成り立つ．



※ $f(a)=\alpha$ となるとき，$y=f(x)$ は $x=a$ で**連続**であるという（連続とは，グラフがつながっているということ）．つまり，$y=f(x)$ が $x=a$ で連続ならば

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つ．以下に，連続関数の例をあげる．
(i) 実数上で連続な関数

定数関数，n 次関数，指数関数，$\sin x$，$\cos x$

(ii) 実数の部分集合上で連続な関数

$x^\alpha\ (x \geqq 0)$，$\dfrac{1}{x^n}\ (x \neq 0)$，$\dfrac{1}{x^\alpha}\ (x>0)$，対数関数 $(x>0)$，$\tan x\ \left(x \neq \dfrac{\pi}{2}+m\pi\right)$

ただし，$\alpha>0$，n は自然数，m は整数とする．
(2) x が正の無限大 ∞ に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に近づくならば，この α を $x\to\infty$ のときの $f(x)$ の**極限値**といい

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad f(x)\to\alpha\ \ (x\to\infty)$$

と書く．
(3) x が負の無限大 $-\infty$ に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に近づくならば，この α を $x\to-\infty$ のときの $f(x)$ の**極限値**といい

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad f(x)\to\alpha\ \ (x\to-\infty)$$

と書く．
※代表的な極限値

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0 \quad (\alpha>0)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$ （n は自然数）

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

5．公式

$\displaystyle\lim_{x\to\square} f(x)=\alpha$，$\displaystyle\lim_{x\to\square} g(x)=\beta$，$k$ を定数とするとき，次の公式が成り立つ．ただし，$\square$ は a，∞，$-\infty$ のいずれかとする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\square}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$ （複号同順）

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\square} kf(x)=k\alpha$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\square}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta\neq 0)$

※はさみうちの定理

$f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$ で $\displaystyle\lim_{x\to\square} f(x)=\lim_{x\to\square} g(x)$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to\square} h(x)$ も存在し，すべての極限値は等しい．

補足．代表的な極限値（33 ページ）の証明

(i)，(ii) は明らか．

(iii) ① $x \to \infty$ のとき，$x \geqq 1$ としてよい．このとき，$n \leqq x < n+1$ を満たす自然数 n がただ 1 つ存在する（$x \to \infty \iff n \to \infty$ に注意）．

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \overset{*}{\leqq} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x \overset{**}{<} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{*}{\leqq} \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \overset{**}{<} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \cdots (*)$$

が成り立つが，

$$\begin{cases} \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \div \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) \to e \div 1 = e \quad (n \to \infty) \\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right) \to e \times 1 = e \quad (n \to \infty) \end{cases}$$

なので，$(*)$ で $x \to \infty$ $(n \to \infty)$ とすれば，はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ が成り立つ．

※ $(*)$ はより詳しく

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

とできる．

② $x \to -\infty$ のとき，$x = -y$ とおけば $y \to \infty$ で

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \times \left(1+\frac{1}{y-1}\right) \to e \quad (y \to \infty)$$

なので，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ が成り立つ．

(iv) ① $x \downarrow 0$ のとき，$x = \dfrac{1}{y}$ とおけば $y \to \infty$ で

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \to e \quad (y \to \infty)$$

なので，$\displaystyle\lim_{x\downarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ が成り立つ．

② $x \uparrow 0$ のとき，$x = \dfrac{1}{y}$ とおけば $y \to -\infty$ で

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \to e \quad (y \to -\infty)$$

なので，$\displaystyle\lim_{x\uparrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ が成り立つ．

以上 ①，② より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ が成り立つ．

---

* $n \leqq x$

** $x < n+1$

(v) $e^x - 1 = y$ とおくと，$x \to 0 \iff y \to 0$ で

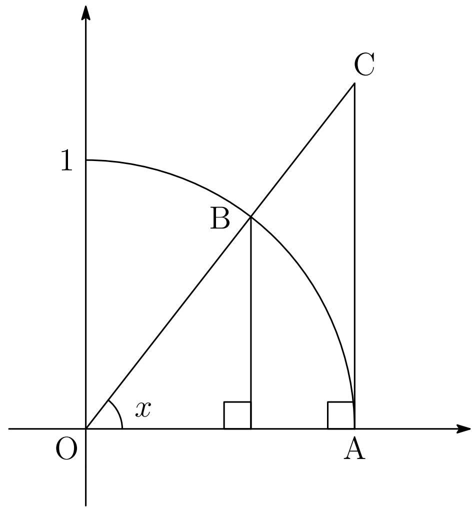
$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y}{\log(1+y)} = \frac{1}{\log(1+y)^{\frac{1}{y}}} \xrightarrow{*} \frac{1}{\log e} = 1 \quad (y \to 0)$$

なので，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ が成り立つ.

(vi) ① $x \downarrow 0$ のとき，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．このとき，右図より

$$\triangle\,\mathrm{OAB} < \text{扇型 OAB} < \triangle\,\mathrm{OAC}$$

は明らか.



$$\begin{cases} \triangle\,\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \sin x = \dfrac{1}{2}\sin x \\ \text{扇型 OAB} = \pi \times \dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{1}{2}x \\ \triangle\,\mathrm{OAC} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \tan x = \dfrac{1}{2}\tan x \end{cases}$$

なので

$$\begin{cases} \triangle\,\mathrm{OAB} < \text{扇型 OAB} & \iff & \dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2}x & \iff & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \\ \text{扇型 OAB} < \triangle\,\mathrm{OAC} & \iff & \dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}\tan x & \iff & \cos x < \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$$

より $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ が成り立つ．$x \downarrow 0$ のとき $\cos x \to 1$ なので，はさみうちの定理より $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つ.

② $x \uparrow 0$ のとき，$x = -y$ とおけば $y \downarrow 0$ で

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-y)}{-y} = \frac{\sin y}{y} \to 1 \quad (y \downarrow 0)$$

なので，$\displaystyle\lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つ.

以上 ①，② より，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つ.

* 対数関数 $y = \log x$ の連続性

メモ

問題５．１

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^3}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+4}{3-2n^2}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{3n(n+2)}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{2n^2+n-1}$ (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{n^2+1}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{n^2+(-1)^n\cdot n\}$ (8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{-n+(-1)^n\}$

問題５．２

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-n)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$

問題５．３

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-0.9)^n$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}1.001^n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{3^n-2\cdot5^n}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-4^{n+1}}{3^n-4^n}$

問題５．４

次の級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2^n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}$

問題５．５

はさみうちの定理を用いて，次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}\quad(a>0)$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

問題５．６

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}(x^2-4x+1)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x+2}{x^2+x-18}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5x+x^3}{4x-x^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-x}{2x^2-3x+1}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3-2x^2+16}{x^3+8}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{5x-2}{x^3-1}\right)$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{x^2+4x-8}{x^3+8}\right)$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+2x-3}-x+1)$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

問題５．７

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\tan x}{\pi-x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x^2}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x-\sin 2x}{\cos x}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$

問題５．８

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx+6}{x^2-x-2}=\frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax-6}{2x^2+3x-2}=b$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2+2}{x^2+x-2}=b$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\sqrt{2}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}(\sqrt{ax^2+x+1}-bx)=1$

問題５．９

$x_n\to x$ ならば $\displaystyle\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\to x$ が成り立つことを認めて，次の問に答えよ.

(1) $a_n>0$，$a_n\to a$ ならば $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\to a$ となることを示せ.

(2) $b_n>0$，$\displaystyle\frac{b_{n+1}}{b_n}\to b$ ならば $\sqrt[n]{b_n}\to b$ となることを示せ.

(3) (2) において $b_n=\displaystyle\frac{n^n}{n!}$ とおくことにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ の値を求めよ.

$\boxed{\text{解答5．1}}$

(1) 2　(2) 1　(3) $-\dfrac{1}{2}$　(4) 0　(5) $\dfrac{1}{2}$　(6) 0　(7) ∞　(8) $-\infty$

$\boxed{\text{解答5．2}}$

(1) 0　(2) -1　(3) $\dfrac{8}{3}$　(4) ∞　(5) $\dfrac{1}{3}$　(6) $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{解答5．3}}$

(1) 0　(2) ∞　(3) $-\dfrac{5}{2}$　(4) 4

$\boxed{\text{解答5．4}}$

(1) 1　(2) 1　(3) $-\dfrac{1}{3}$　(4) $\dfrac{9}{4}$

$\boxed{\text{解答5．5}}$

(1) 0　(2) 0　(3) 1　(4) 1

$\boxed{\text{解答5．6}}$

(1) -2　(2) 3　(3) $-\dfrac{1}{4}$　(4) $\dfrac{5}{4}$　(5) -1　(6) $\dfrac{5}{3}$　(7) $-\dfrac{2}{3}$　(8) $-\dfrac{1}{2}$　(9) 6　(10) 0
(11) 2　(12) -1

$\boxed{\text{解答5．7}}$

(1) 4　(2) $\dfrac{2}{3}$　(3) 2　(4) 0　(5) -1　(6) $\dfrac{\pi}{4}$　(7) 4　(8) -2　(9) e^2　(10) $\dfrac{1}{e^2}$

$\boxed{\text{解答5．8}}$

(1) $a=3,\ b=-4$　(2) $a=\dfrac{9}{4},\ b=-\dfrac{15}{2}$　(3) $a=-1,\ b=1$　(4) $a=-3,\ b=-1$　(5) $a=4,\ b=4\sqrt{2}$　(6) $a=\dfrac{1}{4},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{解答5．9}}$

(1) 略　(2) 略　(3) e

メモ

§６．微分法

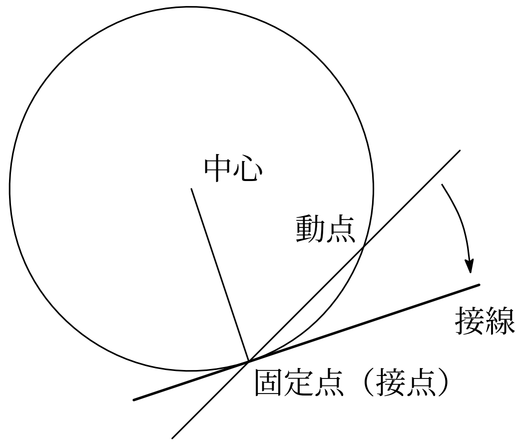
０．導入

微分の目的は

$$\begin{cases} \text{1. 曲線の接線（らしきもの）の方程式を求める} \\ \text{2. 関数のグラフをかく（関数の増減を調べる）} \end{cases}$$

である．歴史的にいって，どちらが最初に考えられたか分からないが，この授業では，1 が最初に考えられたとして導入をしてみる．

直線の方程式は，通る点 (a, b) と傾き m が与えられれば $y = m(x-a)+b$ となるので，曲線上の点における接線（らしきもの）の方程式を求めるためには，その点における傾きを求めればいいことになる．円の接線については中学で学んでいるし，歴史的にみてもかなり古くから扱われ，確立されているものとしてよいだろう．そこで，円の場合（右図参照）を参考にすれば曲線の接線（らしきもの）の傾きを定めることができるのではないか，つまり，曲線上の固定点とそれ以外の動点を通る直線が，動点を固定点に近づけたときある直線に近づくならば，その直線を接線といってもいいのではないだろうかという結論に達する．



１．微分係数

極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ において**微分可能**といい，この極限値を $f'(a)$（$f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**という）とかく．

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ここで，$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は固定点 $(a, f(a))$ と動点 $(a+h, f(a+h))$ を結んだ直線の傾きであることに注意しよう．

※ $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $x=a$ で連続である．逆は一般には成り立たない．

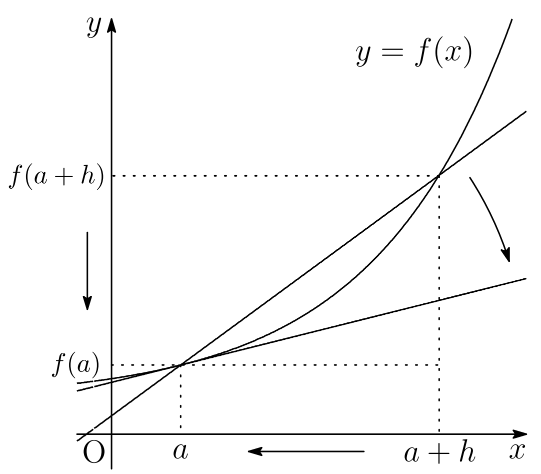
２．曲線の接線

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ を通り，傾き $f'(a)$ の直線を点 $(a, f(a))$ における $y=f(x)$ の**接線**という．よって，点 $(a, f(a))$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

で与えられる．

※接線の方程式は，接点の x 座標が分かれば，この式に代入して簡単に求められる．



3．導関数

関数 $f(x)$ について，x の値 a に $f'(a)$ を対応させる関数を $f(x)$ の**導関数**といい，$f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$，y' などで表す．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

また，$f(x)$ から $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を x について**微分する**という．

4．代表的な導関数

自然数 n と，0 でない実数 α，定数 c に対して，次が成り立つ．

(1) $(c)' = 0$

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

(4) $(e^x)' = e^x$

(5) $(a^x)' = a^x \log a$

(6) $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(7) $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{(\log a)x}$

(8) $(\sin x)' = \cos x$

(9) $(\cos x)' = -\sin x$

(10) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

5．いろいろな微分法則

0 でない実数 α，定数 c に対して，次が成り立つ．

(1) $\{cf(x)\}' = cf'(x)$

(2) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$　（複号同順）

(3) **積の微分法則**

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(4) **商の微分法則**

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{特に} \quad \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

(5) **合成関数の微分法則**

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x) \ \cdots (*) \qquad \text{特に} \quad \{f(x)^\alpha\}' = \alpha f(x)^{\alpha-1} f'(x)$$

(6) **対数関数の微分法則**

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

※関数 $z = g(f(x))$ は，2 つの関数 $z = g(y)$，$y = f(x)$ の合成関数で，$(*)$ の右辺の意味は $g(y)$ を y で微分した $g'(y)$ に $y = f(x)$ を代入した $g'(f(x))$ と $f'(x)$ の積である．また，$(*)$ を $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$ と略記することがある．

6．高階微分

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，その導関数 $f'(x)$ も関数であった．この導関数 $f'(x)$ が再び微分可能であるとき，$f(x)$ は **2 回微分可能**であるといい，$f(x)$ の **2 階導関数**を $f''(x)$ で表す．以下同様に，$f(x)$ が $\boldsymbol{n}$ **回微分可能**なとき，$f(x)$ の $\boldsymbol{n}$ **階導関数**を $f^{(n)}(x)$ で表す．特に $f^{(0)}(x) = f(x)$ と定める．

通常，連続な関数を C^0 **級関数**，n 階導関数が連続な関数を C^n **級関数**，何回でも微分可能な関数を C^∞ **級関数**という．このとき
(1) $f(x)$ が微分可能ならば $f(x)$ は連続，即ち，C^0 級関数である．
(2) $f(x)$ が n 回微分可能ならば，$0 \leqq k \leqq n-1$ なる整数 k に対して $f^{(k)}(x)$ は連続，即ち，C^{n-k-1} 級関数である．ただし n は自然数とする．

7．関数の増減，曲線の凹凸

(1) 定義：ある区間内の任意の x_1，x_2 に対して

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \text{ ならば } f(x_1) < f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ はその区間で}\textbf{単調に増加} \\ x_1 < x_2 \text{ ならば } f(x_1) > f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ はその区間で}\textbf{単調に減少} \end{cases}$$

という．
(2) $f'(x)$ の符号と関数の増減：$f(x)$ がある区間で微分可能で

$$\begin{cases} \text{常に } f'(x) > 0 \implies f(x) \text{ はその区間で単調に増加} \\ \text{常に } f'(x) < 0 \implies f(x) \text{ はその区間で単調に減少} \end{cases}$$

※導関数の符号により関数の増減が判定できる．簡単な関数（例えば n 次関数）は 1 階導関数の符号だけでグラフがかけるが，複雑な関数は 2 階導関数の符号によりグラフの凹凸まで調べないとかけない場合が多い．
(3) $f''(x)$ の符号と曲線の凹凸：$f(x)$ がある区間で 2 回微分可能で

$$\begin{cases} \text{常に } f''(x) > 0 \implies \text{曲線 } y = f(x) \text{ はその区間で下に凸} \\ \text{常に } f''(x) < 0 \implies \text{曲線 } y = f(x) \text{ はその区間で上に凸} \end{cases}$$

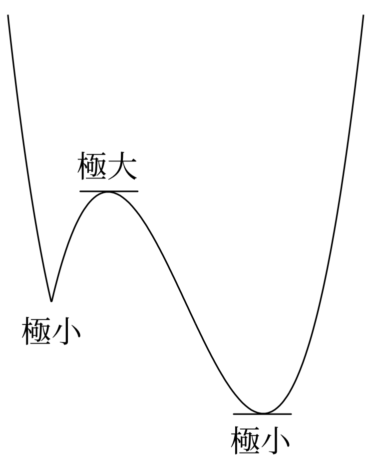
また，曲線の凹凸が変わる境目になる点を**変曲点**という．変曲点の x 座標が a ならば $f''(a) = 0$ が成り立つ．

8．関数の極値

(1) 定義：$f(x)$ が $x = a$ を含むある区間で $x \neq a$ ならば

$$\begin{cases} \text{常に } f(x) < f(a) \text{ のとき } f(a) \text{ は}\textbf{極大値} \\ \text{常に } f(x) > f(a) \text{ のとき } f(a) \text{ は}\textbf{極小値} \end{cases}$$

という．
(2) $f'(x)$ の符号と極大値，極小値：$f(x)$ が $x = a$ を含むある区間で微分可能で，$f'(a) = 0$ となる $x = a$ を境目にして



$$\begin{cases} f'(x) \text{ が正から負に変わる} \implies f(a) \text{ は極大値} \\ f'(x) \text{ が負から正に変わる} \implies f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$$

※ $f'(a) = 0$ ならば，$x = a$ の近くでは $y = f(x)$ のグラフは平らに近い．
※ $x = a$ で極値をとるならば $f'(a) = 0$ だが，一般には逆は成り立たない．

(3) $f''(x)$ の符号と極大値，極小値：$f(x)$ が $x=a$ を含むある区間で C^2 級で

$$\begin{cases} f'(a)=0 \text{ かつ } f''(a)<0 \implies f(a) \text{ は極大値} \\ f'(a)=0 \text{ かつ } f''(a)>0 \implies f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$$

補足１．代表的な導関数（42 ページ）の証明

(1) $(c)'=f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{c-c}{h}=0$

(2) 二項展開より

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{({}_n\mathrm{C}_n x^n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_{n-2}x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_1 xh^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_0 h^n)-x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right)\\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

※ $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$ を二項展開という.

(3) これは，対数微分法則（いろいろな微分法則参照）を用いて示す.
$y=x^\alpha$ の両辺の自然対数をとると $\log y=\log x^\alpha=\alpha\log x$ なので，両辺を x で微分すると，
$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\alpha}{x}$ より $y'=y\cdot\dfrac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$ となる.

(4) $(e^x)'=\lim_{h\to0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\times\lim_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}=e^x$

※ $(e^{Ax})'=\lim_{h\to0}\dfrac{e^{A(x+h)}-e^{Ax}}{h}=Ae^{Ax}\times\lim_{h\to0}\dfrac{e^{Ah}-1}{Ah}=Ae^{Ax}$

(5) $a^x=e^{\log a^x}=e^{(\log a)x}$ なので，$(a^x)'=(e^{(\log a)x})'=(\log a)e^{(\log a)x}=a^x\log a$ となる.

(6) h が十分 0 に近いとき，$\dfrac{x+h}{x}>0$ なので

$$(\log|x|)'=\lim_{h\to0}\frac{\log|x+h|-\log|x|}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\log\left(\frac{x+h}{x}\right)=\frac{1}{x}\times\lim_{h\to0}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\overset{*}{=}\frac{1}{x}$$

(7) $(\log_a|x|)'=\left(\dfrac{\log|x|}{\log a}\right)'=\dfrac{1}{(\log a)x}$

(8) 加法定理より

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \sin x\times\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\times\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \cos x\end{aligned}$$

* 対数関数 $y=\log x$ の連続性

(9) 加法定理より

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}\\ &= \cos x\times\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= -\sin x\end{aligned}$$

(10) 加法定理より

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan h(1+\tan^2 x)}{h(1-\tan x\tan h)}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\times\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin h}{h}\times\frac{1}{\cos h(1-\tan x\tan h)}\right\}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

※ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}=-\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\times\frac{\sin h}{\cos h+1}\right)=0$

補足２．いろいろな微分法則（42 ページ）の証明

(1) $\displaystyle\{cf(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=c\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x)$

(2)

$$\begin{aligned}\{f(x)\pm g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)\pm g(x+h)\}-\{f(x)\pm g(x)\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\pm\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\\ &= f'(x)\pm g'(x)\quad\text{（複号同順）}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)\}+\{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times g(x+h)+f(x)\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\\ &\overset{*}{=} f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

* “微分可能ならば連続” なので $\displaystyle\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

(4)

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)\}-\{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)\}}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times g(x)-f(x)\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

特に，$f(x)=1$ とすれば $f'(x)=0$ なので，$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$ が分かる．

(5) $y=f(x+h)$，$b=f(x)$ とおくと，$f(x)$ の連続性より $y\to b$ なので

$$\begin{aligned}
\{g(f(x))\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\times\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\} \\
&= \lim_{y\to b}\frac{g(y)-g(b)}{y-b}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&\overset{*}{=} g'(b)\times f'(x) \\
&= g'(f(x))f'(x)
\end{aligned}$$

特に，関数 $z=f(x)^\alpha$ は，2 つの関数 $z=g(y)=y^\alpha$，$y=f(x)$ の合成関数 $z=g(f(x))$ なので

$$\{f(x)^\alpha\}'=\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)=\alpha f(x)^{\alpha-1}f'(x)$$

(6) 関数 $z=\log|f(x)|$ は，2 つの関数 $z=g(y)=\log|y|$，$y=f(x)$ の合成関数 $z=g(f(x))$ なので

$$\{\log|f(x)|\}'=\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)=\frac{1}{f(x)}\times f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

補足３．ロピタルの定理

$f(x)$，$g(x)$ は微分可能であるとする．$\dfrac{\lim_{x\to\square}f(x)}{\lim_{x\to\square}g(x)}$ が**不定形**で，$\lim_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が $\pm\infty$ も含めて存在すれば

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．ここで，不定形とは $\dfrac{0}{0}$ や $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ の形のこと．また，$\square$ は a，∞，$-\infty$ のいずれかである．

* $g'(b)=\lim_{k\to 0}\dfrac{g(b+k)-g(b)}{k}=\lim_{y\to b}\dfrac{g(y)-g(b)}{y-b}$

問題６．１

次の関数を微分せよ.

(1) $y = -2x^3 + 4x - 5$

(2) $y = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{5}{4}x^2 - 3x + 12$

(3) $y = (x-2)(3x+4)$

(4) $y = (x+2)(x^2-4)$

(5) $y = (2x^2-3)^3$

(6) $y = (4x^2-3x)^2$

(7) $y = \dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$

(8) $y = \dfrac{x-1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x-1}$

(9) $y = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-2)^2}$

(10) $y = (2x+1)(x+3)(3x-2)^{-1}$

問題６．２

次の関数を微分せよ.

(1) $y = \tan x - x$

(2) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$

(3) $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$

(4) $y = \sqrt{x}e^{2x}$

(5) $y = e^{-x}\sin x$

(6) $y = x^2 2^x$

(7) $y = \log(1+\cos x)$

(8) $y = \dfrac{1+\log x}{x}$

(9) $y = x + \sqrt{2-x^2}$

(10) $y = x\sqrt{2x-x^2}$

(11) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(12) $y = \log(x + \sqrt{x^2+a})$

(13) $y = \log\left(\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)$

(14) $y = \sqrt{4x + \sin 4x}$

(15) $y = \log\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$

(16) $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)^3}}$

問題６．３

$f'(a)$ が存在するとき，次の極限値を a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ.

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a-2h)}{h}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^3f(x)-x^3f(a)}{\sin(x-a)}$

問題６．４

次の曲線の与えられた点における接線の方程式を求めよ.

(1) $y = x^3 - 6x, \quad (1, -5)$

(2) $y = x^3 + 3x^2 - 2, \quad (1, 2)$

(3) $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad (1, 1)$

(4) $y = \dfrac{3x}{x+2}, \quad (1, 1)$

(5) $y = \dfrac{x^3-2}{x^2-2}, \quad (1, 1)$

(6) $y = \sqrt{x-2}, \quad (6, 2)$

(7) $y = x\sin x, \quad (\pi, 0)$

(8) $y = \sin^2 x - \cos x, \quad \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

(9) $y = (x^2-3)e^x, \quad (2, e^2)$

(10) $y = (x+1)\sqrt{1-x^2}, \quad \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

問題６．５

次の曲線へ与えられた点から引いた接線の方程式を求めよ．

(1) $y = x^3 - 5x - 4, \quad (2, -6)$

(2) $y = x^3 + 2, \quad (1, 3)$

(3) $y = -\sqrt{1 - 4x^2}, \quad (-1, 1)$

(4) $y = xe^{-x}, \quad (4, 0)$

(5) $y = x \log x, \quad (0, -2)$

(6) $y = e^{-x^2}, \quad (-\sqrt{2}, 0)$

問題６．６

次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

(2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

(4) $f(x) = -3x^5 + 5x^3 - 1$

(5) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

(6) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

(7) $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^x$

(8) $f(x) = x^2 - 2x - 4\log(x^2 + 1)$

(9) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x \quad (0 < x < 2\pi)$

(10) $f(x) = (1 + \cos x)\sin x \quad (0 < x < 2\pi)$

(11) $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{2 - x}$

(12) $f(x) = |x - 2|e^{-x}$

問題６．７

次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $f(x) = x^3 - 3x \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

(2) $f(x) = |x^2(x - 3)| \quad (-2 \leqq x \leqq 4)$

(3) $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + 2}$

(4) $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

(5) $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$

(6) $f(x) = (x^2 + x - 1)e^{-x} \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$

問題６．８

次の x についての方程式が異なる 3 つの実数解をもつための定数 k のとりうる値の範囲を求めよ．

(1) $2x^3 - 3x^2 - 36x - k = 0$

(2) $x^3 - 3x^2 - 9x + k^2 - 6k = 0$

(3) $x^3 - 3k^2x + 2k = 0$

(4) $e^x - kx^2 = 0$

問題６．９

ロピタルの定理を用いて，次の極限値を求めよ．ただし，n は自然数，$\alpha > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} x^\alpha \log x$

(5) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^\alpha}$

(6) $\displaystyle\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{x^x}}{x}$

問題６．１０

関数 $f(x) = 1 - 2\sin x \cos x + (\cos x - \sin x)^3$ について，次の問に答えよ．ただし $0 \leqq x \leqq \pi$ とする．

(1) $\cos x - \sin x = t$ とおくとき，$f(x)$ を t の式で表せ.
(2) $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ．
(3) a を定数とするとき，x についての方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解の個数を調べよ．

解答６．１

(1) $-6x^2+4$ (2) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{2}x-3$ (3) $6x-2$ (4) $3x^2+4x-4$ (5) $12x(2x^2-3)^2$ (6) $2x(4x-3)(8x-3)$ (7) $\dfrac{2(1+2x)}{(1-x-x^2)^2}$ (8) $-\dfrac{9(2x+1)}{(x+2)^2(x-1)^2}$ (9) $-\dfrac{2(x-5)}{(x-2)^3}$ (10) $\dfrac{6x^2-8x-23}{(3x-2)^2}$

解答６．２

(1) $\tan^2 x$ (2) $2\sin 2x$ (3) $-\sin 2x$ (4) $\dfrac{(4x+1)e^{2x}}{2\sqrt{x}}$ (5) $e^{-x}(\cos x-\sin x)$

(6) $x(x\log 2+2)2^x$ (7) $-\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ (8) $-\dfrac{\log x}{x^2}$ (9) $\dfrac{\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}}$ (10) $\dfrac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$

(11) $-\dfrac{x-1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ (12) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ (13) $-\dfrac{4a^2x}{(a^2+x^2)(a^2-x^2)}$ (14) $\dfrac{2(1+\cos 4x)}{\sqrt{4x+\sin 4x}}$ (15) $\dfrac{2}{(1+2x)(1-2x)}$ (16) $-\dfrac{x^2+8x+9}{2\sqrt{(x+1)(x+2)(x-1)^5}}$

解答６．３

(1) 0 (2) $7f'(a)$ (3) $a^2f'(a)-2af(a)$ (4) $a^3f'(a)-3a^2f(a)$

解答６．４

(1) $y=-3x-2$ (2) $y=9x-7$ (3) $y=-2x+3$ (4) $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$ (5) $y=-x+2$ (6) $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ (7) $y=-\pi x+\pi^2$ (8) $y=x-\dfrac{\pi}{2}+1$ (9) $y=5e^2x-9e^2$ (10) $y=-x+\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$

解答６．５

(1) $y=-2x-2$，$y=7x-20$ (2) $y=3x$，$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{9}{4}$ (3) $y=-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{5}{3}$ (4) $y=-\dfrac{1}{e^2}x+\dfrac{4}{e^2}$ (5) $y=(\log 2+1)x-2$ (6) $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}x+\dfrac{2}{\sqrt{e}}$

解答６．６

(1) 極大値 $f(0)=1$，極小値 $f(2)=-3$ (2) 極大値 $f(-1)=7$，極小値 $f(2)=-20$ (3) 極大値 $f(-1)=\dfrac{11}{3}$，極小値 $f(3)=-7$ (4) 極大値 $f(1)=1$，極小値 $f(-1)=-3$ (5) 極大値 $f(1)=1$，極小値 $f(-1)=-1$ (6) 極大値 $f(0)=1$，極小値 $f(-2)=-\dfrac{1}{3}$ (7) 極大値 $f(-1)=\dfrac{9}{e}$，極小値 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-e^{\frac{3}{2}}$ (8) 極大値 $f(1-\sqrt{2})=1-4\log(4-2\sqrt{2})$，極小値 $f(-1)=3-4\log 2$，$f(1+\sqrt{2})=1-4\log(4+2\sqrt{2})$ (9) 極大値 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{3}{2}$，極小値 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=-3$ (10) 極大値 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，極小値 $f\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{3}$ (11) 極大値 $f(4)=\dfrac{1}{2}$，極小値 $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{9}{2}$ (12) 極大値 $f(3)=\dfrac{1}{e^3}$，極小値 $f(2)=0$

解答６．７

(1) 最大値 $f(2)=2$，最小値 $f(1)=-2$　(2) 最大値 $f(-2)=20$，最小値 $f(0)=f(3)=0$ (3) 最大値 $f(1-\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$，最小値 $f(1+\sqrt{3})=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$　(4) 最大値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$，最小値 $f(0)=f(1)=1$　(5) 最大値 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，最小値 $f(0)=f(2)=0$　(6) 最大値 $f(-2)=e^2$，最小値 $f(-1)=-e$

解答６．８

(1) $-81<k<44$　(2) $-3<k<1$，$5<k<9$　(3) $k<-1$，$1<k$　(4) $k>\dfrac{e^2}{4}$

解答６．９

(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) -1　(3) 0　(4) 0　(5) 0　(6) 1

解答６．１０

(1) t^3+t^2　$(-\sqrt{2}\leqq t\leqq 1)$　(2) $x=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき最大値 2，$x=0$ のとき最小値 $2-2\sqrt{2}$　(3) $a<2-2\sqrt{2}$，$2<a$ のとき 0 個，$a=2-2\sqrt{2}$，$\dfrac{4}{27}<a\leqq 2$ のとき 1 個，$2-2\sqrt{2}<a<0$，$a=\dfrac{4}{27}$ のとき 2 個，$0\leqq a<\dfrac{4}{27}$ のとき 3 個

メモ

§7．積分法

0．導入

積分（定積分）の目的は

曲線で囲まれた部分の面積を求める（定める）

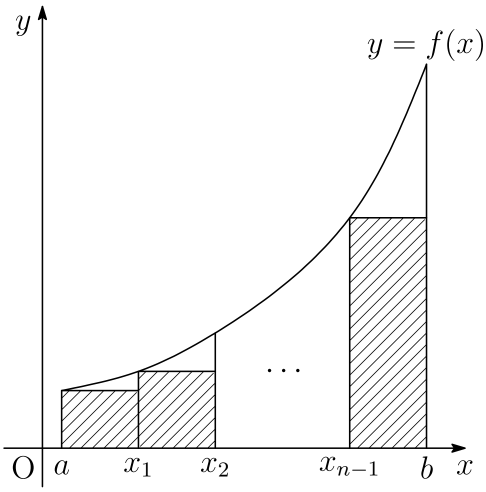
ことであり，与えられた図形を長方形で近似することにより求めようとする試みにより解決された．このことを簡単な場合についてもう少し詳しくいうと，

$$\text{連続関数 } f : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$$

に対し

$$x \text{ 軸},\ \ y = f(x),\ \ x = a,\ \ x = b$$

で囲まれる図形の面積 S を以下のように定義した（より一般の場合の詳しい説明に関しては，微積分の本を参照）．
閉区間 $[a,b]$ を

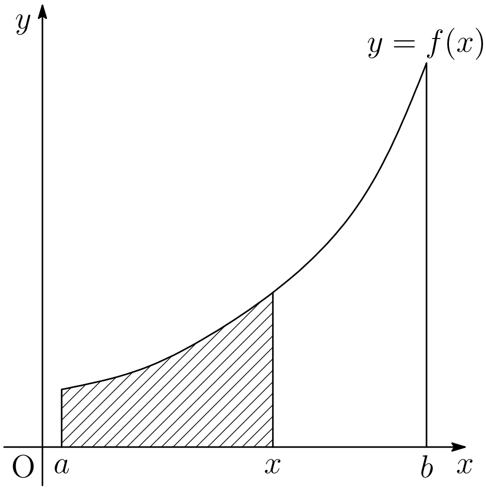


$$\begin{aligned} &\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \\ &|\Delta| = \max\{x_k - x_{k-1} : 1 \leqq k \leqq n\} \end{aligned}$$

と分割し，$k = 1, 2, \cdots, n$ に対し $x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k$ なる ξ_k を任意にとる（図では n 等分，$\xi_k = x_{k-1}$）．このとき

$$\underbrace{\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}_{\text{斜線部の面積}}$$

が存在する（証明は難しい）．この値で求める面積 S を定め，a から b までの $f(x)$ の定積分といい



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

と表した．
更に，$a \leqq x \leqq b$ に対して，図の斜線部の面積を $S(x)$ とする（$S(a) = 0$，$S(b) = S$ に注意）と

$$\left\{ \begin{aligned} &S'(x) = f(x) \\ &\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a) \end{aligned} \right. \quad \cdots (*)$$

が成り立つことが示された（証明は難しい）．
一般に，$F'(x) = f(x)$ を満たす $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数というので，$(*)$ より $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり，定積分は原始関数により求まることが分かった．

１．不定積分，原始関数

関数 $f(x)$ が与えられているとき，微分して $f(x)$ になる関数，即ち

$$F'(x) = f(x)$$

を満たす関数 $F(x)$ を，関数 $f(x)$ の**不定積分**または**原始関数**といい

$$\int f(x)dx$$

で表す．$f(x)$ の不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めることを，$f(x)$ を x について**積分する**または単に**積分する**という．

※ $F(x)$ を $f(x)$ の 1 つの不定積分とすると，任意の定数 C に対して

$$\{F(x) + C\}' = F'(x) + (C)' = f(x)$$

となるので，$F(x) + C$ も $f(x)$ の不定積分となる．これより

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

この定数 C を**積分定数**という．

※ $F(x)$ だけでなく $F(x) + C$ も不定積分となるので，1 つに定まらないということで，不定積分というと理解する．

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[rr, "\text{微分}"] & & F'(x) = f(x) \arrow[d, dash] \\
F(x) + C & & {} \arrow[ll, "\text{積分}"']
\end{tikzcd}$$

$F(x)$ と $F(x) + C$ は定数ぐらいの違い（$\Longrightarrow$ 微分 $\overset{\text{逆}}{\longleftrightarrow}$ 積分）．

２．不定積分の公式

$\alpha \neq -1$，k を定数とすれば，以下の公式が成り立つ．ただし，C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int 1dx \left(= \int dx \text{ とかく}\right) = x + C$

(2) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1}x^{\alpha+1} + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

(4) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

(5) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

(6) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

(7) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

(9) $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

(10) $\displaystyle\int \{f(x)\pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ （複号同順）

(11) **部分積分**（積の微分法則）

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(12) **置換積分**（合成関数の微分法則）

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad (x = g(t))$$

特に

$$\int f(x)^{\alpha}f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1} + C, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$$

３．定積分

a，b を実数とする．$F(x)$ を $f(x)$ の 1 つの原始関数とするとき，$F(b)-F(a)$ を $f(x)$ の a から b までの**定積分**といい

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めることを，$f(x)$ を a から b まで**積分する**という.

※ $F(x)$ を $f(x)$ の 1 つの原始関数とするとき，任意の定数 C に対して，$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である．このとき

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)+C]_a^b = \{F(b)+C\} - \{F(a)+C\} = F(b) - F(a)$$

となるので，定積分は原始関数の取り方によらず一定の値である．1 つの値が定まるから，定積分というと理解する.

☆ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と $F(b)-F(a)$ の間に

$$[F(x)]_{x=a}^{x=b} \quad \text{または単に} \quad [F(x)]_a^b$$

を入れるとよい（先ず原始関数を明らかにする）.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

4．定積分の公式

(1) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$　（k は定数）

(2) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$　（複号同順）

(3) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

(4) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

(5) $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

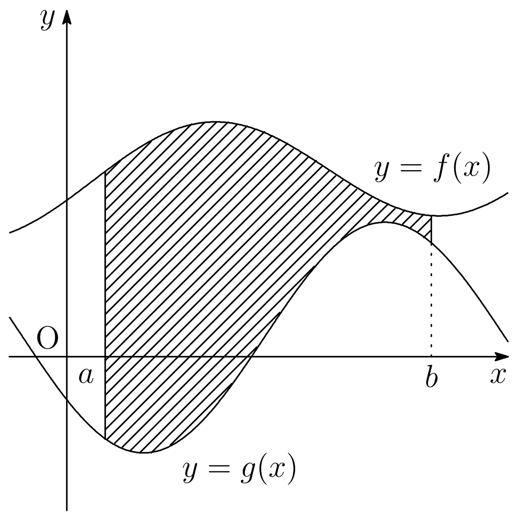
(6) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0 & （f(x) \text{ は奇関数）} \\ 2\displaystyle\int_0^a f(x)dx & （f(x) \text{ は偶関数）} \end{cases}$

5．面積

(1) $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x=a$，$x=b$ で囲まれた図形が右図のようなとき，囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$

で与えられる．



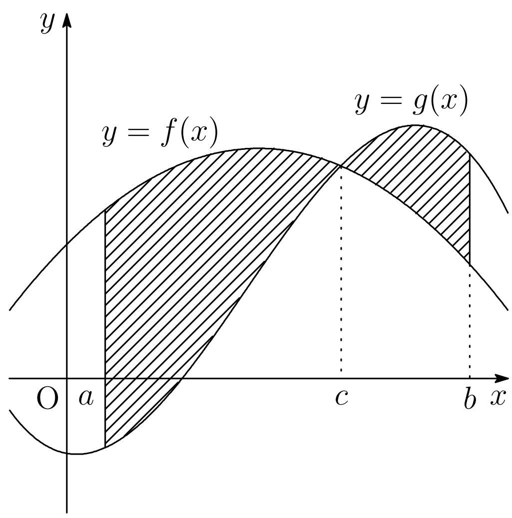
(2) $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x=a$，$x=b$ で囲まれた図形が右図のようなとき，$x=c$ の左側と右側では $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の大小が変わるので，囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_a^c \{f(x) - g(x)\}dx + \int_c^b \{g(x) - f(x)\}dx$$

で与えられる．これは

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

と表すことが出来る．



6．区分求積法

区間 $[a,b]$ を n 等分した分割 Δ を考える．

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k$$

このとき，連続関数 $f(x)$ に対して

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$$

が成り立つ（導入参照）．特に，$a=0$，$b=1$ のとき

$$\int_0^1 f(x)dx = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\xi_k = x_k} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)}_{\xi_k = x_{k-1}}$$

が成り立つ．

7．定積分と微分

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は 積分変数 x に無関係に，a と b によって決まる**定数**である．これは，積分変数を変えても同じであるから，

$$\int_a^b f(t)dt, \quad \int_a^b f(y)dy$$

などはすべて等しくて，定数である．

(2) $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は x を決めるごとに値が定まるので，x の**関数**になる（$x=a$ のときは値 0 をとる）．このとき，f が**連続**ならば

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad \textbf{（微積分の基本定理）}$$

が成り立つ．

※ $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ において，関数の変数 x と積分変数 t を区別しよう．例えば，$\displaystyle\int_0^x (t^2 + x^2 t)dt$ を扱うときには

$$\int_0^x (t^2 + x^2 t)dt = \int_0^x t^2 dt + x^2 \int_0^x t dt$$

というように，積分の中は積分変数に関するものだけにする．

8．体積

立体を x 軸に垂直な平面で切ったときの断面積が $S(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ であるとき，この立体の体積 V は

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

で与えられる．特に，$y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b,\ f(x) \geqq 0)$ を x 軸のまわりに 1 回転させたときの回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \qquad (S(x) = \pi f(x)^2)$$

で与えられる（回転体の断面は，半径 $f(x)$ の円であることに注意）．

メモ

問題７．１

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (2x^2+x)dx$

(2) $\displaystyle\int (x^3+3x^2+2x-3)dx$

(3) $\displaystyle\int (2-x)(1+2x)dx$

(4) $\displaystyle\int x(x-1)(x-3)dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{x^2}dx$

(11) $\displaystyle\int (3x+4)^2dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$

(13) $\displaystyle\int (3e^x+1)dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-2}{e^x}dx$

(15) $\displaystyle\int (1+\cos x)dx$

(16) $\displaystyle\int (\sin x-2\cos x)dx$

(17) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x+2)}dx$

(18) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

(19) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

(20) $\displaystyle\int \tan^2 x dx$

(21) $\displaystyle\int \cos 4x \cos x dx$

(22) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$

(23) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx$

(24) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$

(25) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}dx$

(26) $\displaystyle\int \sqrt{\cos x+1}\sin x dx$

(27) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}dx$

(28) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\log x}}dx$

問題７．２

部分積分法により，次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\sin x dx$

(2) $\displaystyle\int (x+3)\cos 2x dx$

(3) $\displaystyle\int \log x dx$

(4) $\displaystyle\int x(\log x)^2dx$

(5) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

(6) $\displaystyle\int e^x\sin x dx$

問題７．３

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2+4x-5)dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-x}dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x + \sin x)dx$

(6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 2x}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2-\cos x}dx$

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x dx$

問題７．４

部分積分法により，次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x-1)e^{-x}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{e} x\log x dx$

(5) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\log x}{x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_2^{3} \log(x^2-1)dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x dx$

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin x)^2 dx$

問題７．５

置換積分法により，次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1} \sqrt{4-x^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

(6) $\displaystyle\int_1^{4} \frac{1}{x^2-2x+4}dx$

問題７．６

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x^2-2x|dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{12} \sqrt{|x-6|}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos x|dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x - \frac{1}{2}\right| dx$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |e^x-1|dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x|\cos x|dx$

問題７．７

次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $y = x^2+2x-3$，$y = -x^2-4x+5$

(2) $y = x^2-2x+3$，$y = x+4$

(3) $y = x^3-2x^2+x$，$y = x$

(4) $y = x^3-6x$，点 $(1,-5)$ における接線

(5) $y = (x-1)^2 e^x$，$x = 0$，$y = 0$

(6) $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

(7) $y = \sin x(1+\cos x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$，$y = 0$

(8) $y = e^{-x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$，$y = 0$

(9) $y=x^2$，$y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

(10) $y=x+\dfrac{2}{x}-3$，$y=0$

(11) $y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{e}{2}\log x$，$y=0$

(12) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

問題７．８

区分求積法により，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n^3}}+\sqrt{\frac{n+2}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{2n}{n^3}}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2}{n^3}+\frac{n^2}{(n+1)^3}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)^3}\right\}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\log\sqrt[n]{n+1}+\log\sqrt[n]{n+2}+\cdots+\log\sqrt[n]{2n}-\log n\right)$

問題７．９

次の等式をみたす関数 $f(x)$，$g(x)$ と定数 a の値を求めよ．

(1) $f(x)=x^3+x-\displaystyle\int_0^2 f(t)dt$

(2) $f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^1 xf(t)dt+\int_0^2 f(t)dt$

(3) $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=2x^2-3x+1$

(4) $f(x)=\sin x+3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt$

(5) $f(x)=x+\displaystyle\int_0^1 f(t)e^t dt$

(6) $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt=\cos x+a$

(7) $\displaystyle\int_0^{2x} f(t)dt=x^2$

(8) $\begin{cases}\displaystyle\int_1^x f(t)dt=xg(x)+ax+1\\ g(x)=x^2-x\displaystyle\int_0^1 f(t)dt-1\end{cases}$

問題７．１０

次の曲線で囲まれた図形を与えられた軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(1) $y=-x^2+4x$，$y=x$　　x 軸回転

(2) $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$，$y=0$　　x 軸回転

(3) $y=\dfrac{1}{x+1}$，$x=0$，$x=1$，$y=0$　　x 軸回転

(4) $y=e^x+e^{-x}$，$x=\pm1$，$y=0$　　x 軸回転

(5) $y=\tan x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$，$y=0$　　x 軸回転

(6) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，$x=0$，$y=0$　　x 軸回転

(7) $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ $\left(\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi\right)$　　x 軸回転

(8) $y=\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x=0$，$y=1$　　y 軸回転

解答７．１

積分定数省略　(1) $\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$　(2) $\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2-3x$　(3) $-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x$　(4) $\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2$　(5) $-\frac{1}{x}$　(6) $2\sqrt{x}$　(7) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3x^3}$　(8) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+4\sqrt{x}$　(9) $\frac{1}{2}x^2+\log|x|$　(10) $x-2\log|x|-\frac{3}{x}$　(11) $\frac{1}{9}(3x+4)^3$　(12) $\sqrt{2x+1}$　(13) $3e^x+x$　(14) $\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{-x}$　(15) $x+\sin x$　(16) $-\cos x-2\sin x$　(17) $\tan(x+2)$　(18) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$　(19) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$　(20) $\tan x-x$　(21) $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{6}\sin 3x$　(22) $-\frac{3}{5}\cos\frac{5}{6}x-3\cos\frac{x}{6}$　(23) $\log|x^3+1|$　(24) $\frac{1}{2}\log(x^2+2x+3)$　(25) $\log|\sin x|$　(26) $-\frac{2}{3}(\cos x+1)^{\frac{3}{2}}$　(27) $\log(e^x+1)+\frac{1}{e^x+1}$
(28) $2\sqrt{\log x}$

解答７．２

積分定数省略　(1) $-x\cos x+\sin x$　(2) $\frac{1}{2}(x+3)\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x$　(3) $x\log x-x$　(4) $\frac{1}{2}(x\log x)^2-\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{4}x^2$　(5) $-(x+1)e^{-x}$　(6) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$

解答７．３

(1) -6　(2) $\frac{29}{6}$　(3) $\frac{2}{3}$　(4) $\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$　(5) $e^{\frac{\pi}{2}}$　(6) $\frac{\sqrt{3}}{6}$　(7) $\log 3$　(8) 0

解答７．４

(1) -2　(2) $\frac{1}{4}(\pi-\log 4)$　(3) $-e-\frac{1}{e}$　(4) $\frac{1}{4}(e^2+1)$　(5) $\frac{1}{2}(1-\log 2)$　(6) $10\log 2-3\log 3-2$　(7) $\frac{1}{2}(e^{-\frac{\pi}{2}}+1)$　(8) $\frac{1}{8}(3e^\pi-1)$

解答７．５

(1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$　(2) $\pi+\sqrt{3}$　(3) $\frac{\pi}{6}$　(4) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$　(5) $\frac{\pi}{4}$　(6) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

解答７．６

(1) 4　(2) $8\sqrt{6}$　(3) 2　(4) $-\frac{\pi}{12}+\sqrt{3}-1$　(5) $e+\frac{1}{e}-2$　(6) 4π

解答７．７

(1) $\frac{125}{3}$　(2) $\frac{13}{6}\sqrt{13}$　(3) $\frac{4}{3}$　(4) $\frac{27}{4}$　(5) $2e-5$　(6) $\frac{5}{2}$　(7) 2　(8) $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)^2$
(9) $\log 2-\frac{1}{3}$　(10) $\frac{3}{2}-2\log 2$　(11) $\frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}$　(12) 2π

解答７．８

(1) $\frac{2}{3}$　(2) $\frac{7}{3}$　(3) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$　(4) $\frac{3}{8}$　(5) $2\log 2-1$

解答７．９

(1) $f(x)=x^3+x-2$　(2) $f(x)=x^2-\frac{14}{15}x-\frac{4}{5}$　(3) $f(x)=4x-3$, $a=1$, $\frac{1}{2}$　(4) $f(x)=\sin x-\frac{3}{4}$　(5) $f(x)=x+\frac{1}{2-e}$　(6) $f(x)=-\cos x$, $a=-1$　(7) $f(x)=\frac{1}{2}x$
(8) $f(x)=3x^2+2x-3$, $g(x)=x^2+x-1$, $a=-2$

解答7．１０

(1) $\dfrac{108}{5}\pi$　(2) $\dfrac{\pi^2}{2}$　(3) $\dfrac{\pi}{2}$　(4) $\left(e^2 - \dfrac{1}{e^2} + 4\right)\pi$　(5) $\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)\pi$　(6) $\dfrac{\pi}{15}$　(7) $\dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\pi$　(8) $\left(\dfrac{\pi^2}{4} - 2\right)\pi$

正誤表