

解答用紙の裏面使用可

- 1 $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列 (ただし, $n \geq 3$) とする. A の (i, j) 成分 a_{ij} が次の式で与えられるとき, A の行列式 $|A|$ を求めよ. これは答のみでよい.

$$(1) a_{ij} = i + j - 1 \qquad (2) a_{ij} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!} \text{ (二項係数)}$$

$$(3) a_{ij} = 1 - \delta_{ij} \qquad (4) a_{ij} = n - (n-i)\delta_{ij}$$

- 2 n 次正方行列 A が交代行列で $E + A$ が正則であるとき, $(E - A)(E + A)^{-1}$ は直交行列となることを示せ.

- 3 $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする.

(1) A の (i, j) 余因子 Δ_{ij} の定義を述べよ.

(2) A の余因子行列 $\text{adj } A$ の定義を述べよ.

(3) A が正則ならば, $\text{adj } A$ も正則で $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj } (A^{-1})$ となることを示せ.

(4) A が正則のとき, $\text{adj } (\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$ となることを示せ.

- 4 行列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

- 5 連立 1 次方程式 $\begin{cases} ax + y - z = a - 2 \\ x + ay + z = 3 \\ -x + y + az = 5a + 2 \end{cases}$ を解け. ただし, a は定数とする.

解答用紙の裏面使用可

$$\boxed{1} \quad \mathbb{R}^3 \text{ のベクトル } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を考える .

- (1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が \mathbb{R}^3 の基底であることを示せ .
- (2) \mathbf{b} を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の 1 次結合で表せ .
- (3) Gram-Schmidt の直交化法により , $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ から \mathbb{R}^3 の正規直交基底を作れ .
- (4) \mathbf{b} の $\text{sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ への正射影を求めよ .

$$\boxed{2} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a-3 \\ 1 & a & 1 & 2a-4 \\ a & 1 & a & -4a+2 \end{pmatrix} \text{ により定まる線形写像 } f_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ に対して,}$$

$\text{Im}f_A, \text{Ker}f_A$ の次元と基底を求めよ .

$$\boxed{3} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ とする . 次の問に答えよ .}$$

- (1) A の固有値を求めよ .
- (2) A を対角化する正則行列 P を求め , A を対角化せよ .
- (3) 連立微分方程式
$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_2' = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 \end{cases}$$
 の一般解を求めよ .