

※解答用紙の裏面使用可

- 1 (1) n 次の置換 σ が, $\sigma(i) = n - i + 1$ ($i = 1, \dots, n$) をみたすとき, σ の符号 $\text{sgn } \sigma$ を求めよ. **答のみでよい.**

(2) 次の行列式を求めよ. **答のみでよい.**

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 3 & a & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ. **答のみでよい.**

- 2 n 次正方行列 A が交代行列で $E - A$ が正則であるとき, $(E - A)^{-1}(E + A)$ は直交行列となることを示せ.

- 3 $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする.

(1) A の (i, j) 余因子 Δ_{ij} の定義を述べよ.

(2) A の余因子行列 $\text{adj } A$ の定義を述べよ.

(3) A が正則ならば, $\text{adj } A$ も正則で $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj } (A^{-1})$ となることを示せ.

- 4 連立 1 次方程式
$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = 2a - 1 \\ x + y + az = 3a - 2 \end{cases}$$
 を解け. ただし, a は定数とする.

5 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次独立であることを示し, $\mathbf{b}$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{c}$ は 1 次従属であることを示し, $\mathbf{c}$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の 1 次結合で表せ.

※解答用紙の裏面使用可

$$\boxed{1} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ により生成される } \mathbb{R}^4 \text{ の部分空間}$$

$W = \text{sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ を考える.

(1) (順序を考えた組) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が W の基底となることを示せ.

また, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W$ となるための必要十分条件を, x_1, x_2, x_3, x_4 のみたすべき

1 次方程式の形で求めよ.

(2) $\overset{\text{グラム}}{\text{Gram-Schmidt}}$ の直交化法により, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ から W の正規直交基底を作れ.

(3) $\dim W = 3$ であるから, W の直交補空間 $W^\perp$ は 1 次元となる. $W^\perp = \text{sp}\{\mathbf{a}_4\}$ となる $\mathbf{a}_4 \in \mathbb{R}^4$ を 1 つ求めよ.

(4) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ に対して, $\mathbf{x}$ の W への正射影を対応させる写像 f は $\mathbb{R}^4$ の線形写像となる. この線形写像 f の基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ に関する表現行列 A を求めよ.

$$\boxed{2} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -a \\ 1 & a & 1 & 2a-3 \\ a & 1 & 1 & -2a+1 \end{pmatrix} \text{ により定まる線形写像 } f_A: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ に対して,}$$

$\text{Im} f_A, \text{Ker} f_A$ の次元と基底を求めよ.

$$\boxed{3} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A を対角化する正則行列 P を求め, A を対角化せよ.

(3) 連立微分方程式 $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$ の一般解を求めよ.