

1 次の行列式の値を求めよ .

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 162$$

$$(3) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 22$$

$$(4) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

2 次の行列式を因数分解せよ .

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b-c & c-b \\ a-c & b & c-a \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix} = (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

$$(3) \begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ca \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ca & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & abc \\ 1 & a & a^2 & bc \\ 1 & b & b^2 & ca \\ 1 & c & c^2 & ab \end{vmatrix} = -(a-1)(b-1)(c-1)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(5) \begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+4b)(a-b)^4$$

3 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ .

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 & -2 & -9 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4 (1) 方程式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & x & -1 & 0 \\ 7 & 0 & x & -1 \\ 15 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ を解け . $x = -1, 3, 5$

(2) n 次正方行列 A の (i, j) 成分が

$$a_{ij} = n - (n - i)\delta_{ij}$$

であるとき , 行列式 $|A|$ を求めよ . ただし , $n \geq 3$ とする . $|A| = (-1)^{n-1}n!$

$$(3) n \text{ 次の行列式 } D_n = \begin{vmatrix} 4 & 1 & & & & 0 \\ 3 & 4 & 1 & & & \\ & 3 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 3 & 4 & 1 \\ & & & & 3 & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ を求めよ . } D_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

解答用紙の裏面使用可

- 1 (1) 次の行列式の値を求めよ．答のみでよい．

$$(i) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (iii) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．答のみでよい．

- 2 n 次正方行列 A が直交行列で $E + A$ が正則であるとき， $(E - A)(E + A)^{-1}$ は交代行列となることを示せ．

- 3 $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする．

(1) A の (i, j) 余因子 Δ_{ij} の定義を述べよ．

(2) A の余因子行列 $\text{adj } A$ の定義を述べよ．

(3) A が正則ならば， $\text{adj } A$ も正則で $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj } (A^{-1})$ となることを示せ．

- 4 連立 1 次方程式 $\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = 2a - 1 \\ x + y + az = 3a - 2 \end{cases}$ を解け．ただし， a は定数とする．

5 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix}$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次独立であることを示し， $\mathbf{b}$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{c}$ は 1 次従属であることを示し， $\mathbf{c}$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の 1 次結合で表せ．

$$[1] \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から 1 次独立なベクトルを最大個数選び, 残りのベクトルを選んだ 1 次独立なベクトルの 1 次結合で表せ.

$$[2] \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & -5 \\ 14 & 5 & 4 & -13 \end{pmatrix} \text{ により定まる線形写像 } f_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \text{ に対して,}$$

$\text{Im} f_A, \text{Ker} f_A$ の次元と基底を求めよ.

$$[3] \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a-3 \\ 1 & a & 1 & 2a-4 \\ a & 1 & a & -4a+2 \end{pmatrix} \text{ により定まる線形写像 } f_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ に対して,}$$

$\text{Im} f_A, \text{Ker} f_A$ の次元と基底を求めよ.

[4] $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示し, さらに, $\mathbf{a}$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(2) グラム・シュミット の正規直交化法により, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ から $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ を作れ.

(3) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して, $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{c}_1 \rangle \mathbf{c}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{c}_2 \rangle \mathbf{c}_2$ とおく. $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を満たす行列 A を求めよ.

(4) $P = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3)$ とおくとき, ${}^t P A P$ を計算せよ.

5 $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は 1 次独立である (証明不要) . $\overset{\text{グラム}}{\text{Schmidt}}$ の正規直交化法により ,
 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ から $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底を作れ .

解答用紙の裏面使用可

$$\boxed{1} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ により生成される } \mathbb{R}^4 \text{ の部分空間}$$

$W = \text{sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ を考える .

(1) (順序を考えた組) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が W の基底となることを示せ .

また , $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W$ となるための必要十分条件を , x_1, x_2, x_3, x_4 のみたすべき

1 次方程式の形で求めよ .

(2) $\overset{\text{グラム}}{\text{Gram-Schmidt}}$ の正規直交化法により , $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ から W の正規直交基底を作れ .

(3) $\dim W = 3$ であるから , W の直交補空間 $W^\perp$ は 1 次元となる . $W^\perp = \text{sp}\{\mathbf{a}_4\}$ となる $\mathbf{a}_4 \in \mathbb{R}^4$ を 1 つ求めよ .

(4) 固有値が $-2, 2$ であり , 固有空間が $W(-2) = W, W(2) = W^\perp$ であるような 4 次の正方行列 A を求めよ .

$$\boxed{2} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & -3a+2 \\ 1 & a & 1 & 5a-6 \\ 1 & a & a & 2a-3 \end{pmatrix} \text{ により定まる線形写像 } f_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ に対して ,}$$

$\text{Im} f_A, \text{Ker} f_A$ の次元と基底を求めよ .

$$\boxed{3} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ とする .}$$

(1) A の固有値を求めよ .

(2) A を対角化する正則行列 P を求め , A を対角化せよ .

(3) 連立微分方程式 $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_3' = -x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{cases}$ の一般解を求めよ .