$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(3) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ から $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を作れ.

(4) $\boldsymbol{b}$ の $\mathrm{sp}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ への正射影を求めよ.

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ により定まる線形写像 $f_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して,

$\mathrm{Im} f_A, \mathrm{Ker} f_A$ の次元と基底を求めよ.

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a^2 - a \\ 0 & a & -a^2 + a \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値と固有空間の次元を求めよ.
(2) A が対角化できる a の値を求めよ.

$\boxed{4}$ 連立微分方程式 $\begin{cases} x_1'' = -2x_1 + 5x_2 \\ x_2'' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$ を解け.