章末問題 4-B-1 について

$\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}, \quad W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

を考える (実際に部分空間になることは各自確認).

(1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W_1 \iff x_1 + x_2 - x_3 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = s + t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

$$\therefore \quad W_1 = \mathrm{sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{で} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1\text{ 次独立}} \quad \text{より} \quad \dim W_1 = 2$$

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W_2 \iff x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = -s + 2t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

$$\therefore \quad W_2 = \mathrm{sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{で} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{1\text{ 次独立}} \quad \text{より} \quad \dim W_2 = 2$$

(3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\therefore \quad W_1 \cap W_2 = \mathrm{sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{で} \quad \dim(W_1 \cap W_2) = 1$$

(4) $W_1+W_2=\mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ であるが,

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

より $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{1\text{ 次独立}}$ で $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\therefore\quad W_1+W_2=\mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}\quad\text{で}\quad\dim(W_1+W_2)=3$$

以上により

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

が成り立つ.

※ (4) において

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&2&0\\0&0&-2&1\end{pmatrix}$$

より $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}_{1\text{ 次独立}}$ で $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

$$\therefore\quad W_1+W_2=\mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}\quad\text{で}\quad\dim(W_1+W_2)=3$$

でもよい.