$\mathrm{Im}f_A$，$\mathrm{Ker}f_A$ について

定理

$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して，$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ とおく．このとき，線形写像

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (\boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x})$$

が定まり，

$$\mathrm{Im}f_A = \mathrm{sp}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$$

が成り立つ．

証明

$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}f_A$ とすると $(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)[\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}]$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とすると

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \in \mathrm{sp}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$$

逆に，$\boldsymbol{y} \in \mathrm{sp}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ とすると $(\exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R})[\boldsymbol{y} = k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n]$

$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ で

$$\boldsymbol{y} = k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}f_A \qquad \blacksquare$$

例（2003 年度後期試験）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$ により定まる線形写像 $f_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して,

$\mathrm{Im} f_A, \mathrm{Ker} f_A$ の次元と基底を求めよ.

解答

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 13 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+3R_2]{R_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad \dim(\mathrm{Im} f_A) = \mathrm{rank} A = 2, \qquad \mathrm{Im} f_A = \mathrm{sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

また，上と同じ行変形により

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f_A \iff \begin{cases} x_1 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_3 - 5x_4 \\ x_2 = 3x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-5t \\ 3s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

$$\therefore \quad \mathrm{Ker} f_A = \mathrm{sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \dim(\mathrm{Ker} f_A) = 4 - \mathrm{rank} A = 2$$