## §1.　1 変数関数の微分

### ★関数の極限

(1) $f(x)$ を $a$ の近くで定義された関数とする．$x$ が $a$ に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 $\alpha$ に近づくならば，この $\alpha$ を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**といい

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha \ \ (x \to a)$$

と書く．

※ $x \to a$ のときの $f(x)$ の状態は，$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ ……① の他に

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \cdots\cdots②$$

①, ② のいずれでもない　……③

がある．① の場合は**極限値が存在する**（有限確定）といい，② の場合は極限値は存在しないが**極限が存在する**（確定）といい，③ の場合は**極限が存在しない**という．

$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \alpha \\ \infty \\ -\infty \\ \text{存在しない} \end{cases}$$

※ $x$ が $x > a,\ x < a$ を満たしながら $a$ に近づくとき，それぞれ $x \to a+0,\ x \to a-0$ と表し，

$$\lim_{x \to a+0} f(x), \quad \lim_{x \to a-0} f(x)$$

を，それぞれ $a$ における $f(x)$ の**右側極限（値）**，**左側極限（値）**という．次が成り立つ．

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha \ \text{かつ} \ \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$$

(2) $f(x)$ を十分大きい $x$ に対して定義された関数とする．$x$ が限りなく大きくなるとき，$f(x)$ の値が一定の値 $\alpha$ に近づくならば，この $\alpha$ を $x \to \infty$ のときの $f(x)$ の**極限値**といい

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha \ \ (x \to \infty)$$

と書く．

※ (1) と同様に，$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の状態は次の場合がある．

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} \alpha \\ \infty \\ -\infty \\ \text{存在しない} \end{cases}$$

(3) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ も同様に定義され，$x \to -\infty$ のときの $f(x)$ の状態は次の場合がある．

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} \alpha \\ \infty \\ -\infty \\ \text{存在しない} \end{cases}$$

### ★四則演算に関する極限公式

$\lim_{x\to\square} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to\square} g(x)=\beta,\ k$ を定数とするとき，次の公式が成り立つ．ただし，$\square$ は $a,\ \infty,\ -\infty$ のいずれかとする．

(1) $\lim_{x\to\square}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$ （複号同順） (2) $\lim_{x\to\square} kf(x)=k\alpha$

(3) $\lim_{x\to\square} f(x)g(x)=\alpha\beta$ (4) $\lim_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}\quad(\beta\neq 0)$

### ★はさみうちの原理

$f(x)\leqq h(x)\leqq g(x),\ \lim_{x\to\square} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to\square} g(x)=\alpha$ ならば $\lim_{x\to\square} h(x)=\alpha$ が成り立つ．ただし，$\square$ は $a,\ \infty,\ -\infty$ のいずれかとする．

### ★$e$ について

数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は収束することが知られている．そこで，この極限値を **Napier**（ネピア） **の数**といい $e$ で表す．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$e$ の値は

$$e=2.71828182845904523536\cdots\cdots$$

であり，無理数であることが知られている．また，$e$ を底とする対数を**自然対数**といい，$\log x$ や $\ln x$ で表す．

### ★代表的な極限値

(1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0\quad(\alpha>0)$ (2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0\quad(n$ は自然数$)$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ (4) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

(5) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$

(7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (8) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ (10) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

証明

(1), (2) は明らか．

(3) $x\geqq 1$ に対して，$n\leqq x<n+1$ を満たす自然数 $n$ がただ 1 つ存在する（$x\to\infty \iff n\to\infty$ に注意）．このとき

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\leqq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leqq\left(1+\frac{1}{n}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

特に

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\qquad\cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．そして

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}}=\frac{e}{1}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

であるから，$(*)$ で $x\to\infty$ $(n\to\infty)$ とすれば，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ が成り立つ．

(4) $x=-t$ とおけば，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\\ &= e\cdot 1\\ &= e\end{aligned}$$

(5) $x=\dfrac{1}{t}$ とおけば，$x\to+0$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

また，$x=\dfrac{1}{t}$ とおけば，$x\to-0$ のとき $t\to-\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ が成り立つ．

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$

※対数関数の連続性（p.10 参照）を用いている．

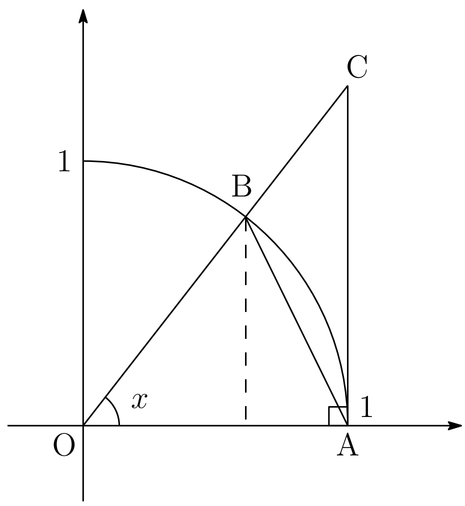
(7) $e^x-1=t$ とおくと，$x\to0$ のとき $t\to0$ であるから

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log(1+t)}=1$$

(8) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，右図より

$$\triangle\,\mathrm{OAB} < \text{扇形 OAB} < \triangle\,\mathrm{OAC}$$

は明らか.




$$\begin{cases} \triangle\,\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x = \dfrac{1}{2}\sin x \\ \text{扇形 OAB} = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x = \dfrac{1}{2}x \\ \triangle\,\mathrm{OAC} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x = \dfrac{1}{2}\tan x \end{cases}$$

であるから

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\therefore\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x = 1$ であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つ.

次に，$x = -t$ とおけば，$x \to -0$ のとき $t \to +0$ であるから

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つ.

(9) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} = 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1$ ∎

**【問題 1.1】**

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{2x^2-x-6}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x-4}{5x^2+x-6}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^3-4x^2+x+6}{2x^2-7x+3}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x-4}{5x^2+x-6}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^3+x^2-3x+1}{6x^2-x-1}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x+1-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}$

(11) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$

(12) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

(13) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

(14) $\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+6x+10}+x+3\right)$

(15) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}$

(16) $\lim_{x\to0}\frac{3\tan 8x}{2x}$

(17) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{\sin 2x}$

(18) $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}$

(19) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 7x}{x^2}$

(20) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos x}$

(21) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}$

(22) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{x\sin x}$

(23) $\lim_{x\to0}\frac{x\tan x}{\cos x-1}$

(24) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x(1-\cos 5x)}{\tan^3 x}$

(25) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x(1-\cos 3x)}{\tan^3 2x}$

(26) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$

(27) $\lim_{x\to0}\frac{x-3\sin x}{2x+\sin x}$

(28) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x+\sin 4x}{\sin 3x+\sin 5x}$

(29) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+6x^2}-1}{\sin^2 x}$

(30) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\tan 2x}-\sqrt{1+\tan 2x}}{x}$

(31) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}$

(32) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(33) $\lim_{x\to0}\frac{\cos 11x-\cos 6x}{x^2}$

(34) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos 5x}-\sqrt{\cos 3x}}{x^2}$

(35) $\lim_{x\to0}\frac{x^2(-\sin x+3\sin 3x)}{\tan x(\cos x-\cos 3x)}$

(36) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3\sin x)}{x}$

(37) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

(38) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x\sin^2 x}$

(39) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin 3x}{3x}\right)$

(40) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

(41) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

(42) $\lim_{x\to0}\frac{e^{(x+1)^2}-e^{x^2+1}}{x}$

(43) $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\log(1+x)}$

(44) $\lim_{x\to0}\frac{e^{x\sin 3x}-1}{x\log(1+x)}$

解答

(1) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x+2}=\frac{4}{3}$

(2) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to-1}\frac{x+2}{x-3}=-\frac{1}{4}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(3x+4)}=\lim_{x\to2}\frac{2x+3}{3x+4}=\frac{7}{10}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{2x^2-x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(2x+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{2x+3}=\frac{12}{7}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x-4}{5x^2+x-6}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)(5x+6)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+4}{5x+6}=\frac{6}{11}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^3-4x^2+x+6}{2x^2-7x+3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2-x-2)}{(x-3)(2x-1)}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-2}{2x-1}=\frac{4}{5}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x-4}{5x^2+x-6}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)(5x+6)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+4}{5x+6}=\frac{6}{11}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^3+x^2-3x+1}{6x^2-x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(x^2+x-1)}{(2x-1)(3x+1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x^2+x-1}{3x+1}=-\frac{1}{10}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x+1-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}=\lim_{x\to3}\frac{\{(x+1)^2-(3x+7)\}(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{\{(2x+3)-(x+6)\}(x+1+\sqrt{3x+7})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x^2-x-6))(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{(x-3)(x+1+\sqrt{3x+7})}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+2)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{(x-3)(x+1+\sqrt{3x+7})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x+2)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{x+1+\sqrt{3x+7}}=\frac{15}{4}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}=\lim_{x\to0}\frac{(1+2x)-\left(1+x-\dfrac{x^2}{2}\right)^2}{x^3\left\{\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\dfrac{x^2}{2}\right)\right\}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1+2x)-\left(1+x^2+\dfrac{x^4}{4}+2x-x^3-x^2\right)}{x^3\left(\sqrt{1+2x}+1+x-\dfrac{x^2}{2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^3-\dfrac{x^4}{4}}{x^3\left(\sqrt{1+2x}+1+x-\dfrac{x^2}{2}\right)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{x}{4}}{\sqrt{1+2x}+1+x-\dfrac{x^2}{2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-3x+2)-x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}=\frac{-3}{1+1}=-\frac{3}{2}$

(12) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)=-1$

(13) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+1}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t+1)-(t^2+1)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

(14) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+6x+10}+x+3\right)=\lim_{t\to\infty}\left\{-t\left(\sqrt{t^2-6t+10}-t+3\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t\{(t^2-6t+10)-(t-3)^2\}}{\sqrt{t^2-6t+10}+(t-3)}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t\{(t^2-6t+10)-(t^2-6t+9)\}}{\sqrt{t^2-6t+10}+t-3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-6t+10}+t-3}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{6}{t}+\frac{10}{t^2}}+1-\frac{3}{t}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\right)=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3\tan8x}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan8x}{8x}\cdot12\right)=1\cdot12=12$

(17) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan5x}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}\cdot\frac{5}{2}\right)=1\cdot1\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$

(18) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos2x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(2x)^2}{1-\cos2x}\cdot\frac{1}{4}\right\}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

※ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right\}=\frac{1}{2}\cdot1^2=\frac{1}{2}$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos7x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos7x}{(7x)^2}\cdot49\right\}=\frac{1}{2}\cdot49=\frac{49}{2}$

(20) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^23x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot9\right\}=1^2\cdot2\cdot9=18$

(21) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos7x}{\sin^25x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos7x}{(7x)^2}\cdot\left(\frac{5x}{\sin5x}\right)^2\cdot\frac{49}{25}\right\}=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{49}{25}=\frac{49}{50}$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos6x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos6x}{(6x)^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot36\right\}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot36=18$

(23) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\tan x}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\right)=-1\cdot2=-2$

(24) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x(1-\cos5x)}{\tan^3x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{1-\cos5x}{(5x)^2}\cdot\left(\frac{x}{\tan x}\right)^3\cdot75\right\}$

$\displaystyle=1\cdot\frac{1}{2}\cdot1^3\cdot75=\frac{75}{2}$

(25) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin7x(1-\cos3x)}{\tan^32x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin7x}{7x}\cdot\frac{1-\cos3x}{(3x)^2}\cdot\left(\frac{2x}{\tan2x}\right)^3\cdot\frac{7\cdot9}{8}\right\}$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^3 \cdot \frac{7 \cdot 9}{8} = \frac{63}{16}$$

(26) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x\sin x) - \cos^2 x}{\sin^2 x(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x + x\sin x}{\sin^2 x(\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \left\{ \left(1 + \frac{x}{\sin x}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x\sin x} + \cos x} \right\}$$

$$= (1 + 1) \cdot \frac{1}{1 + 1} = 1$$

(27) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - 3\sin x}{2x + \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 3 \cdot \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 - 3 \cdot 1}{2 + 1} = -\frac{2}{3}$

(28) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \sin 4x}{\sin 3x + \sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x} + \frac{\sin 4x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x} + \frac{\sin 5x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 + \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 + \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}$

$$= \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 4}{1 \cdot 3 + 1 \cdot 5} = \frac{3}{4}$$

※和積の公式を用いて計算してもよい.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \sin 4x}{\sin 3x + \sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 3x \cos x}{2\sin 4x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{3}{4} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4}\frac{3}{4}$$

(29) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 6x^2} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + 6x^2) - 1}{\sin^2 x(\sqrt{1 + 6x^2} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{\sin^2 x(\sqrt{1 + 6x^2} + 1)}$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{6}{\sqrt{1 + 6x^2} + 1} \right\} = 1^2 \cdot \frac{6}{1 + 1} = 3$$

(30) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \tan 2x} - \sqrt{1 + \tan 2x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \tan 2x) - (1 + \tan 2x)}{x(\sqrt{1 - \tan 2x} + \sqrt{1 + \tan 2x})}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\tan 2x}{x(\sqrt{1 - \tan 2x} + \sqrt{1 + \tan 2x})} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{-4}{\sqrt{1 - \tan 2x} + \sqrt{1 + \tan 2x}} \right)$$

$$= 1 \cdot \frac{-4}{1 + 1} = -2$$

(31) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[3]{1 + \sin x} - \sqrt[3]{1 - \sin x}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\{(1 + x) - (1 - x)\}\{(\sqrt[3]{1 + \sin x})^2 + \sqrt[3]{1 + \sin x}\sqrt[3]{1 - \sin x} + (\sqrt[3]{1 - \sin x})^2\}}{\{(1 + \sin x) - (1 - \sin x)\}(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x\{(\sqrt[3]{1 + \sin x})^2 + \sqrt[3]{1 + \sin x}\sqrt[3]{1 - \sin x} + (\sqrt[3]{1 - \sin x})^2\}}{2\sin x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{(\sqrt[3]{1 + \sin x})^2 + \sqrt[3]{1 + \sin x}\sqrt[3]{1 - \sin x} + (\sqrt[3]{1 - \sin x})^2}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} \right\}$$

$$= 1 \cdot \frac{1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

※ $\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$ を用いて 3 乗根の有理化をした．

(32) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(33) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos 11x-\cos 6x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 6x)-(1-\cos 11x)}{x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos 6x}{(6x)^2}\cdot 36-\frac{1-\cos 11x}{(11x)^2}\cdot 121\right\}=\frac{1}{2}\cdot 36-\frac{1}{2}\cdot 121=-\frac{85}{2}$

※和積の公式を用いて計算してもよい．

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 11x-\cos 6x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\dfrac{17x}{2}\sin\dfrac{5x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(-2\cdot\frac{\sin\dfrac{17x}{2}}{\dfrac{17x}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{5x}{2}}{\dfrac{5x}{2}}\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{5}{2}\right)$$

$\displaystyle=-2\cdot1\cdot1\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{5}{2}=-\frac{85}{2}$

(34) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos 5x}-\sqrt{\cos 3x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2(\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 3x)-(1-\cos 5x)}{x^2(\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x})}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot 9-\dfrac{1-\cos 5x}{(5x)^2}\cdot 25}{\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}\cdot 9-\dfrac{1}{2}\cdot 25}{1+1}=-4$$

※ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos 5x}-\sqrt{\cos 3x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2(\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x})}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{x^2(\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{-8}{\sqrt{\cos 5x}+\sqrt{\cos 3x}}\right)=1\cdot1\cdot\frac{-8}{1+1}=-4$

(35) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2(-\sin x+3\sin 3x)}{\tan x(\cos x-\cos 3x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{\sin x}{x}+3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\dfrac{\tan x}{x}\cdot\left\{\dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot 9-\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right\}}$$

$$=\frac{-1+3\cdot1\cdot3}{1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 9-\dfrac{1}{2}\right)}=2$$

※分母・分子に 3 倍角の公式を使ったり，分母の $\cos x-\cos 3x$ に和積の公式を使ってもよい．

(36) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(3\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(3\sin x)}{3\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot 3\right\}=1\cdot1\cdot3=3$

(37) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right\}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(38) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2(\cos x-1)}{x\sin x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot(-2)\right\}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(-2)=-1$

(39) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin 3x}{3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 2x-2\sin 3x}{6x^3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x\cos x-2(3\sin x-4\sin^3 x)}{6x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(3\cos x-3+4\sin^2 x)}{6x^3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\{4\sin^2 x-3(1-\cos x)\}}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)\{4(1+\cos x)-3\}}{3x^3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+4\cos x}{3}\right)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{6}$

(40) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2=e^2$

(41) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2e^{-x}\right)=1\cdot 2=2$

(42) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x+1)^2}-e^{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)e^{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2e^{x^2+1}\right)=1\cdot 2e=2e$

(43) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right\}=1\cdot 1\cdot 1\cdot 2=2$

(44) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 3x}-1}{x\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{x\sin 3x}-1}{x\sin 3x}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right\}=1\cdot 1\cdot 1\cdot 3=3$

### ★区間

実数 $a,b$ $(a<b)$ に対して，$a<x<b$ をみたす実数 $x$ 全体を $(a,b)$ で表し，$a\leqq x\leqq b$ をみたす実数 $x$ 全体を $[a,b]$ で表す．$(a,b)$, $[a,b]$ はそれぞれ**開区間**，**閉区間**といわれる．この他にも，$(a,b]$, $[a,b)$, $(a,\infty)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,\infty)$ などが区間である（最後の区間は実数全体のこと）．今後は，区間で定義された関数を考える．

### ★関数の連続性

$f(x)$ を区間 $I$ で定義された関数とする．$a\in I$ として，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ ……① が成り立つとき，$f(x)$ は $x=a$ で**連続**であるという．$a$ が $I$ の端点でないときは

$$①\iff\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)\quad\text{かつ}\quad\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a)$$

である．一方，$a$ が $I$ の端点のときは，① は片側極限で考える．また，$f(x)$ が $I$ の各点で連続であるとき，$f(x)$ は $I$ で**連続**であるという．

### ★導関数

$f(x)$ を開区間 $I$ で微分可能な関数，すなわち，各要素 $x\in I$ に対し，極限値

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が存在するとき，$f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数**という．また，$f(x)$ から $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を $x$ について**微分する**という．一般に，微分可能ならば連続である．

★四則演算に関する微分法則

$f(x), g(x)$ を開区間 $I$ で微分可能な関数とするとき，次が成り立つ．

(1) $\{kf(x)\}' = kf'(x)$　($k$ は定数)

(2) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$　（複号同順）

(3) 積の微分法則

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(4) 商の微分法則

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{特に} \quad \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

ただし，$g(x) \neq 0$ とする．

証明

(1) $\{kf(x)\}' = \lim_{h \to 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = k \times \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = kf'(x)$

(2)
$$\begin{aligned}
\{f(x) \pm g(x)\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) \pm g(x+h)\} - \{f(x) \pm g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \\
&= f'(x) \pm g'(x) \quad \text{（複号同順）}
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)\} + \{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times g(x+h) + f(x) \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

※「微分可能ならば連続」を使った．

(4)
$$\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)\} - \{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\}}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \times g(x) - f(x) \times \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

※「微分可能ならば連続」を使った．　■

### ★合成関数の微分法則

$f(x), g(x)$ をそれぞれ開区間 $I, J$ で微分可能な関数とし，$f(I) \subset J$ をみたすとする．このとき

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

が成り立つ．

**証明**

$y = f(x+h),\ b = f(x)$ とおくと，$f(x)$ の連続性より $h \to 0$ のとき $y \to b$ なので

$$\begin{aligned}
\{g(f(x))\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \\
&= \lim_{y\to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \times \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= g'(b) \times f'(x) \\
&= g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

### ★代表的な導関数

(1) $(c)' = 0 \quad (c$ は定数$)$

(2) $(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$

(3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \neq 0)$

(4) $(e^x)' = e^x$

(5) $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(6) $(\sin x)' = \cos x$

(7) $(\cos x)' = -\sin x$

(8) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

※ (3) で $\alpha = \dfrac{1}{2}$ とした $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ は公式としたい．

**証明**

(1) $(c)' = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$

(2) $n \in \mathbb{N}$ のとき，二項定理 $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$ を用いると

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{({}_n\mathrm{C}_0 x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x h^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n h^n) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \right\} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

また，$n = -m\ (m \in \mathbb{N})$ のとき

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

(4) $(e^x)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \times \lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x$

(3) $x > 0$ のとき $x^\alpha = e^{\log x^\alpha} = e^{\alpha \log x}$ であるから

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \log x}\right)' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

※ $\alpha \in \mathbb{Z}$ のときは $x > 0$ でなくてもよい．

(5) $h$ が十分 0 に近いとき，$\dfrac{x+h}{x} > 0$ なので

$$(\log|x|)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log|x+h| - \log|x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log \dfrac{x+h}{x}}{h} = \frac{1}{x} \times \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{x}{h}} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
(6)\quad (\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\{\sin x \cos h + \cos x \sin h\} - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= -\sin x \times \lim_{h\to 0} \left(\frac{1 - \cos h}{h^2} \cdot h\right) + \cos x \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7)\quad (\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\{\cos x \cos h - \sin x \sin h\} - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
&= -\cos x \times \lim_{h\to 0} \left(\frac{1 - \cos h}{h^2} \cdot h\right) - \sin x \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(8)\quad (\tan x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\tan h(1 + \tan^2 x)}{h(1 - \tan x \tan h)} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \times \lim_{h\to 0} \left(\frac{\tan h}{h} \cdot \frac{1}{1 - \tan x \tan h}\right) \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

**★1 次関数との合成**

定数 $A\ (\neq 0)$，$B$ に対して，次が成り立つ．

(3) $\left\{(Ax+B)^{\alpha}\right\}' = A\alpha(Ax+B)^{\alpha-1} \quad (\alpha \neq 0)$

(4) $\left(e^{Ax+B}\right)' = Ae^{Ax+B}$

(5) $\left(\log|Ax+B|\right)' = \dfrac{A}{Ax+B}$

(6) $\left\{\sin(Ax+B)\right\}' = A\cos(Ax+B)$

(7) $\left\{\cos(Ax+B)\right\}' = -A\sin(Ax+B)$

(8) $\left\{\tan(Ax+B)\right\}' = \dfrac{A}{\cos^2(Ax+B)}$

**★公式としたい合成微分**

$f(x)$ を開区間 $I$ で微分可能な関数とする．

(1) $f(x) > 0\ (x \in I)$ のとき

$$\{f(x)^{\alpha}\}' = \alpha f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x) \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\left\{\sqrt{f(x)}\right\}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

※$\alpha \in \mathbb{Z}$ のときは $f(x) > 0\ (x \in I)$ でなくてもよい．

(2) $f(x) \neq 0\ (x \in I)$ のとき

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{（対数微分）}$$

**【問題 1.2】**

次の関数を微分せよ．

(1) $\dfrac{3x+4}{2x-3}$

(2) $\dfrac{x^2-3}{x-2}$

(3) $\dfrac{2x^2-x+3}{x-4}$

(4) $\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$

(5) $\dfrac{3x-4}{x^2+1}$

(6) $\dfrac{2x+3}{x^2-2x-3}$

(7) $\dfrac{-3x+5}{x^2-4x+7}$

(8) $\dfrac{2x+1}{x^2-2x+5}$

(9) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2}$

(10) $\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+2}$

(11) $\dfrac{2x^2}{2x^2+3x-2}$

(12) $\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-2x+3}$

(13) $\dfrac{-x^2+3x-1}{x^2+5x+7}$

(14) $\dfrac{-2x^2+5x+1}{x^2-x+3}$

(15) $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-2x+3}$

(16) $\dfrac{-5x^2+8x+1}{x^2-3x+4}$

(17) $\dfrac{-4x^2+7x+1}{x^2+x+1}$

(18) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+3x+5}$

(19) $\dfrac{x^2-4x+7}{2x^2-x+3}$

(20) $\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+2}$

(21) $\dfrac{x^3+4x^2+5x+1}{x+1}$

(22) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+x}$

(23) $\sin 5x \sin 4x$

(24) $\sin 2x \cos 3x$

(25) $\sin 3x \cos 5x$

(26) $\cos 7x \cos 4x$

(27) $\dfrac{1}{\tan x}$

(28) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

(29) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

(30) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(31) $\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$

(32) $\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}$

(33) $\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}$

(34) $\dfrac{\cos x}{3+\sin x}$

(35) $\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$

(36) $\dfrac{\cos x}{1-4\sin x}$

(37) $\dfrac{\sin(2x+1)}{3x-5}$

(38) $e^{3x}-6e^{2x}+9e^x+2$

(39) $(x-1)e^{x-2}$

(40) $x^2e^{-x}$

(41) $(x^2-3)e^x$

(42) $(x^2+4x+4)e^{-x}$

(43) $(x^2-2x-11)e^{\frac{x}{2}}$

(44) $(x^2+3x)e^{-\frac{x}{2}}$

(45) $(2x^3+3x^2+4x+4)e^{-x}$

(46) $e^{-x}\sin 2x$

(47) $e^{3x}\cos 5x$

(48) $x^2\log x - x$

(49) $x^3\log 2x$

(50) $\log x(2\log x-1)$

(51) $(\log x-1)(2\log x+x^3-4x)$

(52) $\dfrac{e^x-2}{3e^x+4}$

(53) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(54) $\dfrac{x}{\log x-1}$

(55) $\dfrac{e^{\frac{x}{4}}}{x^2-3x+18}$

(56) $\dfrac{xe^x}{e^x+3}$

(57) $\dfrac{xe^{5x}}{e^x-2}$

(58) $\dfrac{x\cos 4x}{\log x}$

(59) $\dfrac{x\log x}{\log x+1}$

(60) $\dfrac{x\log x}{x+\log x}$

(61) $\dfrac{x\log x}{x-\log x}$

(62) $\dfrac{e^x}{x\log x}$

(63) $\dfrac{e^{2x}\log x}{\log x-3}$

(64) $\left(\dfrac{x+1}{2x^2+1}\right)^4$

(65) $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3$

(66) $\sqrt{x^2-2x+2}$

(67) $\sqrt{1+\sin^2 x}$

(68) $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

(69) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

(70) $\sqrt{\dfrac{5x-2}{7x+13}}$

(71) $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x+1}}$

(72) $x\sqrt{9-x^2}$

(73) $(x+1)\sqrt{1-x^2}$

(74) $(x+2)\sqrt{x^2-1}$

(75) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(76) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$

(77) $\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-x^2}}$

(78) $\dfrac{1+2x}{\sqrt{3-5x-x^2}}$

(79) $\dfrac{(\log x)^2}{x}$

(80) $\dfrac{\sin^5 x}{x^3}$

(81) $\log(e^x+\sin x)$

(82) $\log(e^{2x}+x)$

(83) $\log(\tan x)$

(84) $\log(\log x)^3$

(85) $\log(x+\sqrt{x^2+7})$

(86) $\log(-x+\sqrt{x^2+4})$

(87) $\log|x-\sqrt{x^2+9}|$

(88) $\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(89) $\log\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$

(90) $\log\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$

(91) $x^{\sqrt{x}}\quad(x>0)$

(92) $x^{\tan x}\quad(x>0)$

(93) $(\log x)^{\sin x}\quad(x>1)$

(94) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\quad(x<-1,\ 0<x)$

解答

(1) $\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right)'=\dfrac{3\cdot(2x-3)-(3x+4)\cdot 2}{(2x-3)^2}=-\dfrac{17}{(2x-3)^2}$

(2) $\left(\dfrac{x^2-3}{x-2}\right)'=\dfrac{2x\cdot(x-2)-(x^2-3)\cdot 1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

(3) $\left(\dfrac{2x^2-x+3}{x-4}\right)'=\dfrac{(4x-1)\cdot(x-4)-(2x^2-x+3)\cdot 1}{(x-4)^2}=\dfrac{2x^2-16x+1}{(x-4)^2}$

(4) $\left(\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}\right)'=\dfrac{(4x-3)\cdot(x-1)-(2x^2-3x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}$

(5) $\left(\dfrac{3x-4}{x^2+1}\right)'=\dfrac{3\cdot(x^2+1)-(3x-4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$

(6) $\left(\dfrac{2x+3}{x^2-2x-3}\right)'=\dfrac{2\cdot(x^2-2x-3)-(2x+3)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2}=\dfrac{-2x^2-6x}{(x^2-2x-3)^2}$

(7) $\left(\dfrac{-3x+5}{x^2-4x+7}\right)'=\dfrac{-3\cdot(x^2-4x+7)-(-3x+5)\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+7)^2}=\dfrac{3x^2-10x-1}{(x^2-4x+7)^2}$

(8) $\left(\dfrac{2x+1}{x^2-2x+5}\right)'=\dfrac{2\cdot(x^2-2x+5)-(2x+1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2}=\dfrac{-2x^2-2x+12}{(x^2-2x+5)^2}$

(9) $\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2}\right)'=\dfrac{(2x-1)\cdot(x^2+2)-(x^2-x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{x^2+2x-2}{(x^2+2)^2}$

(10) $\left(\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+2}\right)'=\dfrac{(6x-2)\cdot(x^2+2)-(3x^2-2x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{2x^2+10x-4}{(x^2+2)^2}$

(11) $\left(\dfrac{2x^2}{2x^2+3x-2}\right)'=\dfrac{4x\cdot(2x^2+3x-2)-2x^2\cdot(4x+3)}{(2x^2+3x-2)^2}=\dfrac{6x^2-8x}{(2x^2+3x-2)^2}$

(12) $\left(\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-2x+3}\right)'=\dfrac{(6x-4)\cdot(x^2-2x+3)-(3x^2-4x+1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2}$

$=\dfrac{-2x^2+16x-10}{(x^2-2x+3)^2}$

(13) $\left(\dfrac{-x^2+3x-1}{x^2+5x+7}\right)'=\dfrac{(-2x+3)\cdot(x^2+5x+7)-(-x^2+3x-1)\cdot(2x+5)}{(x^2+5x+7)^2}$

$=\dfrac{-8x^2-12x+26}{(x^2+5x+7)^2}$

(14) $\left(\dfrac{-2x^2+5x+1}{x^2-x+3}\right)'=\dfrac{(-4x+5)\cdot(x^2-x+3)-(-2x^2+5x+1)\cdot(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$

$=\dfrac{-3x^2-14x+16}{(x^2-x+3)^2}$

(15) $\left(\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-2x+3}\right)'=\dfrac{(4x+1)\cdot(x^2-2x+3)-(2x^2+x-1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2}$

$=\dfrac{-5x^2+14x+1}{(x^2-2x+3)^2}$

(16) $\left(\dfrac{-5x^2+8x+1}{x^2-3x+4}\right)'=\dfrac{(-10x+8)\cdot(x^2-3x+4)-(-5x^2+8x+1)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x+4)^2}$

$=\dfrac{7x^2-42x+35}{(x^2-3x+4)^2}$

(17) $\left(\dfrac{-4x^2+7x+1}{x^2+x+1}\right)'=\dfrac{(-8x+7)\cdot(x^2+x+1)-(-4x^2+7x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$$= \frac{-11x^2-10x+6}{(x^2+x+1)^2}$$

(18) $\left(\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+3x+5}\right)' = \dfrac{(4x-1)\cdot(x^2+3x+5)-(2x^2-x-1)\cdot(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \dfrac{7x^2+22x-2}{(x^2+3x+5)^2}$

(19) $\left(\dfrac{x^2-4x+7}{2x^2-x+3}\right)' = \dfrac{(2x-4)\cdot(2x^2-x+3)-(x^2-4x+7)\cdot(4x-1)}{(2x^2-x+3)^2} = \dfrac{7x^2-22x-5}{(2x^2-x+3)^2}$

(20) $\left(\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+2}\right)' = \dfrac{(2x-3)\cdot(x^2+x+2)-(x^2-3x-1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} = \dfrac{4x^2+6x-5}{(x^2+x+2)^2}$

(21) $\left(\dfrac{x^3+4x^2+5x+1}{x+1}\right)' = \dfrac{(3x^2+8x+5)\cdot(x+1)-(x^3+4x^2+5x+1)\cdot 1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{2x^3+7x^2+8x+4}{(x+1)^2}$$

(22) $\left(\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+x}\right)' = \dfrac{(4x^3+2x)\cdot(x^3+x)-(x^4+x^2+1)\cdot(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$

$$= \frac{x^6+2x^4-2x^2-1}{(x^3+x)^2}$$

(23) $(\sin 5x \sin 4x)' = 5\cos 5x \cdot \sin 4x + \sin 5x \cdot 4\cos 4x = 5\cos 5x \sin 4x + 4\sin 5x \cos 4x$

(24) $(\sin 2x \cos 3x)' = 2\cos 2x \cdot \cos 3x + \sin 2x \cdot (-3\sin 3x) = 2\cos 2x \cos 3x - 3\sin 2x \sin 3x$

(25) $(\sin 3x \cos 5x)' = 3\cos 3x \cdot \cos 5x + \sin 3x \cdot (-5\sin 5x) = 3\cos 3x \cos 5x - 5\sin 3x \sin 5x$

(26) $(\cos 7x \cos 4x)' = -7\sin 7x \cdot \cos 4x + \cos 7x \cdot (-4\sin 4x) = -7\sin 7x \cos 4x - 4\cos 7x \sin 4x$

(27) $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

(28) $\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot (1-\cos x) - \sin x \cdot \sin x}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$

$$= \frac{-1+\cos x}{(1-\cos x)^2} = \frac{-1}{1-\cos x}$$

(29) $\left(\dfrac{\cos x}{1-\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin x \cdot (1-\sin x) - \cos x \cdot (-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \dfrac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$$

(30) $\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot (1+\cos x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

(31) $\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}\right)' = \dfrac{-\cos x \cdot (1+\cos x) - (1-\sin x)\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$$= \frac{-\cos x - \cos^2 x + \sin x - \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{-1-\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

(32) $\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}\right)' = \dfrac{\sin x\cdot(1+\sin x)-(1-\cos x)\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{\sin x+\sin^2 x-\cos x+\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$

$= \dfrac{1+\sin x-\cos x}{(1+\sin x)^2}$

(33) $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right)' = \dfrac{-\sin x\cdot(\sin x+\cos x)-\cos x\cdot(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$= \dfrac{-\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x+\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)^2} = \dfrac{-1}{(\sin x+\cos x)^2}$

(34) $\left(\dfrac{\cos x}{3+\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin x\cdot(3+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(3+\sin x)^2} = \dfrac{-3\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(3+\sin x)^2}$

$= \dfrac{-1-3\sin x}{(3+\sin x)^2}$

(35) $\left(\dfrac{\sin x}{2-\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x\cdot(2-\cos x)-\sin x\cdot\sin x}{(2-\cos x)^2} = \dfrac{2\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x}{(2-\cos x)^2}$

$= \dfrac{-1+2\cos x}{(2-\cos x)^2}$

(36) $\left(\dfrac{\cos x}{1-4\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin x\cdot(1-4\sin x)-\cos x\cdot(-4\cos x)}{(1-4\sin x)^2}$

$= \dfrac{-\sin x+4\sin^2 x+4\cos^2 x}{(1-4\sin x)^2} = \dfrac{4-\sin x}{(1-4\sin x)^2}$

(37) $\left\{\dfrac{\sin(2x+1)}{3x-5}\right\}' = \dfrac{2\cos(2x+1)\cdot(3x-5)-\sin(2x+1)\cdot 3}{(3x-5)^2}$

$= \dfrac{2(3x-5)\cos(2x+1)-3\sin(2x+1)}{(3x-5)^2}$

(38) $(e^{3x}-6e^{2x}+9e^x+2)' = 3e^{3x}-12e^{2x}+9e^x$

(39) $\{(x-1)e^{x-2}\}' = 1\cdot e^{x-2}+(x-1)\cdot e^{x-2} = xe^{x-2}$

(40) $(x^2e^{-x})' = 2x\cdot e^{-x}+x^2\cdot(-e^{-x}) = (2x-x^2)e^{-x}$

(41) $\{(x^2-3)e^x\}' = 2x\cdot e^x+(x^2-3)\cdot e^x = (x^2+2x-3)e^x$

(42) $\{(x^2+4x+4)e^{-x}\}' = (2x+4)\cdot e^{-x}+(x^2+4x+4)\cdot(-e^{-x}) = (-x^2-2x)e^{-x}$

(43) $\{(x^2-2x-11)e^{\frac{x}{2}}\}' = (2x-2)\cdot e^{\frac{x}{2}}+(x^2-2x-11)\cdot\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \left(\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{15}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$

(44) $\{(x^2+3x)e^{-\frac{x}{2}}\}' = (2x+3)\cdot e^{-\frac{x}{2}}+(x^2+3x)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) = \left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}+3\right)e^{-\frac{x}{2}}$

(45) $\{(2x^3+3x^2+4x+4)e^{-x}\}' = (6x^2+6x+4)\cdot e^{-x}+(2x^3+3x^2+4x+4)\cdot(-e^{-x})$

$= (-2x^3+3x^2+2x)e^{-x}$

(46) $(e^{-x}\sin 2x)' = -e^{-x}\cdot\sin 2x+e^{-x}\cdot 2\cos 2x = e^{-x}(-\sin 2x+2\cos 2x)$

(47) $(e^{3x}\cos 5x)' = 3e^{3x}\cdot\cos 5x+e^{3x}\cdot(-5\sin 5x) = e^{3x}(3\cos 5x-5\sin 5x)$

(48) $(x^2\log x-x)' = \left(2x\cdot\log x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}\right)-1 = 2x\log x+x-1$

(49) $(x^3 \log 2x)' = 3x^2 \cdot \log 2x + x^3 \cdot \dfrac{2}{2x} = 3x^2 \log 2x + x^2$

(50) $\{\log x(2\log x - 1)\}' = \dfrac{1}{x} \cdot (2\log x - 1) + \log x \cdot \dfrac{2}{x} = \dfrac{4\log x - 1}{x}$

(51) $\{(\log x - 1)(2\log x + x^3 - 4x)\}' = \dfrac{1}{x} \cdot (2\log x + x^3 - 4x) + (\log x - 1) \cdot \left(\dfrac{2}{x} + 3x^2 - 4\right)$

$= \dfrac{2}{x}\log x + x^2 - 4 + \left(\dfrac{2}{x} + 3x^2 - 4\right)\log x - \dfrac{2}{x} - 3x^2 + 4 = \left(3x^2 - 4 + \dfrac{4}{x}\right)\log x - 2x^2 - \dfrac{2}{x}$

(52) $\left(\dfrac{e^x - 2}{3e^x + 4}\right)' = \dfrac{e^x \cdot (3e^x + 4) - (e^x - 2) \cdot 3e^x}{(3e^x + 4)^2} = \dfrac{3e^{2x} + 4e^x - 3e^{2x} + 6e^x}{(3e^x + 4)^2} = \dfrac{10e^x}{(3e^x + 4)^2}$

(53) $\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \dfrac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

(54) $\left(\dfrac{x}{\log x - 1}\right)' = \dfrac{1 \cdot (\log x - 1) - x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\log x - 1)^2} = \dfrac{\log x - 2}{(\log x - 1)^2}$

(55) $\left(\dfrac{e^{\frac{x}{4}}}{x^2 - 3x + 18}\right)' = \dfrac{\dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{4}} \cdot (x^2 - 3x + 18) - e^{\frac{x}{4}} \cdot (2x - 3)}{(x^2 - 3x + 18)^2}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{4}\{(x^2 - 3x + 18) - 4(2x - 3)\}e^{\frac{x}{4}}}{(x^2 - 3x + 18)^2} = \dfrac{(x^2 - 11x + 30)e^{\frac{x}{4}}}{4(x^2 - 3x + 18)^2}$

(56) $\left(\dfrac{xe^x}{e^x + 3}\right)' = \dfrac{(1 \cdot e^x + x \cdot e^x) \cdot (e^x + 3) - xe^x \cdot e^x}{(e^x + 3)^2} = \dfrac{e^x\{(1 + x)(e^x + 3) - xe^x\}}{(e^x + 3)^2}$

$= \dfrac{e^x(e^x + 3 + xe^x + 3x - xe^x)}{(e^x + 3)^2} = \dfrac{e^x(e^x + 3x + 3)}{(e^x + 3)^2}$

(57) $\left(\dfrac{xe^{5x}}{e^x - 2}\right)' = \dfrac{(1 \cdot e^{5x} + x \cdot 5e^{5x}) \cdot (e^x - 2) - xe^{5x} \cdot e^x}{(e^x - 2)^2} = \dfrac{e^{5x}\{(1 + 5x)(e^x - 2) - xe^x\}}{(e^x - 2)^2}$

$= \dfrac{e^{5x}(e^x - 2 + 5xe^x - 10x - xe^x)}{(e^x - 2)^2} = \dfrac{e^{5x}(4xe^x + e^x - 10x - 2)}{(e^x - 2)^2}$

(58) $\left(\dfrac{x\cos 4x}{\log x}\right)' = \dfrac{\{1 \cdot \cos 4x + x \cdot (-4\sin 4x)\} \cdot \log x - x\cos 4x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\log x)^2}$

$= \dfrac{\cos 4x \log x - 4x \sin 4x \log x - \cos 4x}{(\log x)^2}$

(59) $\left(\dfrac{x\log x}{\log x + 1}\right)' = \dfrac{\left(1 \cdot \log x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) \cdot (\log x + 1) - x\log x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\log x + 1)^2} = \dfrac{(\log x + 1)^2 - \log x}{(\log x + 1)^2}$

$= \dfrac{(\log x)^2 + \log x + 1}{(\log x + 1)^2}$

(60) $\left(\dfrac{x\log x}{x+\log x}\right)' = \dfrac{\left(1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot(x+\log x) - x\log x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{(x+\log x)^2}$

$= \dfrac{x\log x + (\log x)^2 + x + \log x - x\log x - \log x}{(x+\log x)^2} = \dfrac{x+(\log x)^2}{(x+\log x)^2}$

(61) $\left(\dfrac{x\log x}{x-\log x}\right)' = \dfrac{\left(1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot(x-\log x) - x\log x\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{(x-\log x)^2}$

$= \dfrac{x\log x - (\log x)^2 + x - \log x - x\log x + \log x}{(x-\log x)^2} = \dfrac{x-(\log x)^2}{(x-\log x)^2}$

(62) $\left(\dfrac{e^x}{x\log x}\right)' = \dfrac{e^x\cdot x\log x - e^x\cdot\left(1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x}\right)}{(x\log x)^2} = \dfrac{e^x(x\log x - \log x - 1)}{(x\log x)^2}$

(63) $\left(\dfrac{e^{2x}\log x}{\log x - 3}\right)' = \dfrac{\left(2e^{2x}\cdot\log x + e^{2x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot(\log x - 3) - e^{2x}\log x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x - 3)^2}$

$= \dfrac{e^{2x}\left\{\left(2\log x + \dfrac{1}{x}\right)(\log x - 3) - \dfrac{\log x}{x}\right\}}{(\log x - 3)^2}$

$= \dfrac{e^{2x}\left\{2(\log x)^2 - 6\log x + \dfrac{\log x}{x} - \dfrac{3}{x} - \dfrac{\log x}{x}\right\}}{(\log x - 3)^2} = \dfrac{e^{2x}\left\{2(\log x)^2 - 6\log x - \dfrac{3}{x}\right\}}{(\log x - 3)^2}$

$= \dfrac{e^{2x}\left\{2x(\log x)^2 - 6x\log x - 3\right\}}{x(\log x - 3)^2}$

(64) $\left\{\left(\dfrac{x+1}{2x^2+1}\right)^4\right\}' = 4\left(\dfrac{x+1}{2x^2+1}\right)^3\cdot\dfrac{1\cdot(2x^2+1)-(x+1)\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}$

$= 4\left(\dfrac{x+1}{2x^2+1}\right)^3\cdot\dfrac{-2x^2-4x+1}{(2x^2+1)^2} = \dfrac{4(-2x^2-4x+1)(x+1)^3}{(2x^2+1)^5}$

(65) $\left\{\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3\right\}' = 3\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2\cdot\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 3\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2\cdot\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{3x^2(-x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

(66) $\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

(67) $\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)' = \dfrac{2\sin x\cdot\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} = \dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

(68) $\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}}\cdot\dfrac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

(69) $$\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

(70) $$\left(\sqrt{\frac{5x-2}{7x+13}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5x-2}{7x+13}}} \cdot \frac{5\cdot(7x+13)-(5x-2)\cdot 7}{(7x+13)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7x+13}{5x-2}} \cdot \frac{79}{(7x+13)^2} = \frac{79}{2(7x+13)^2}\sqrt{\frac{7x+13}{5x-2}}$$

(71) $$\left(\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x+1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x+1}}} \cdot \frac{(2x-4)\cdot(x+1)-(x^2-4x+3)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x^2-4x+3}} \cdot \frac{x^2+2x-7}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-7}{2(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x^2-4x+3}}$$

(72) $$\left(x\sqrt{9-x^2}\right)' = 1\cdot\sqrt{9-x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{(9-x^2)-x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$= \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

(73) $$\left\{(x+1)\sqrt{1-x^2}\right\}' = 1\cdot\sqrt{1-x^2} + (x+1)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{(x+1)x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(1-x^2)-(x^2+x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

(74) $$\left\{(x+2)\sqrt{x^2-1}\right\}' = 1\cdot\sqrt{x^2-1} + (x+2)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} + \frac{(x+2)x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{(x^2-1)+(x^2+2x)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(75) $$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-(x+1)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x^2+1)-(x^2+x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

(76) $$\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{-1\cdot\sqrt{1+x^2}-(1-x)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{-\sqrt{1+x^2}-\frac{(1-x)x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{-(1+x^2)-(x-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

(77) $\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\right)' = \dfrac{1\cdot\sqrt{4x-x^2}-(x-3)\cdot\dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2}$

$= \dfrac{\sqrt{4x-x^2}-\dfrac{(x-3)(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2} = \dfrac{(4x-x^2)-(-x^2+5x-6)}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}} = \dfrac{-x+6}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$

(78) $\left(\dfrac{1+2x}{\sqrt{3-5x-x^2}}\right)' = \dfrac{2\cdot\sqrt{3-5x-x^2}-(1+2x)\cdot\dfrac{-5-2x}{2\sqrt{3-5x-x^2}}}{3-5x-x^2}$

$= \dfrac{2\sqrt{3-5x-x^2}+\dfrac{(1+2x)(5+2x)}{2\sqrt{3-5x-x^2}}}{3-5x-x^2} = \dfrac{4(3-5x-x^2)+(5+12x+4x^2)}{2(3-5x-x^2)\sqrt{3-5x-x^2}}$

$= \dfrac{17-8x}{2(3-5x-x^2)\sqrt{3-5x-x^2}}$

(79) $\left\{\dfrac{(\log x)^2}{x}\right\}' = \dfrac{\left(2\log x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot x-(\log x)^2\cdot 1}{x^2} = \dfrac{(2-\log x)\log x}{x^2}$

(80) $\left(\dfrac{\sin^5 x}{x^3}\right)' = \dfrac{(5\sin^4 x\cdot\cos x)\cdot x^3-\sin^5 x\cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x^2\sin^4 x(5x\cos x-3\sin x)}{x^6}$

$= \dfrac{(5x\cos x-3\sin x)\sin^4 x}{x^4}$

(81) $\{\log(e^x+\sin x)\}' = \dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}$

(82) $\{\log(e^{2x}+x)\}' = \dfrac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}$

(83) $\{\log(\tan x)\}' = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan x} = \dfrac{1}{\sin x\cos x}$

(84) $\{\log(\log x)^3\}' = \dfrac{3(\log x)^2\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^3} = \dfrac{3}{x\log x}$

(85) $\left\{\log(x+\sqrt{x^2+7})\right\}' = \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}} = \dfrac{\sqrt{x^2+7}+x}{\sqrt{x^2+7}\,(x+\sqrt{x^2+7})} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+7}}$

(86) $\left\{\log(-x+\sqrt{x^2+4})\right\}' = \dfrac{-1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{-x+\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{-\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}\,(-x+\sqrt{x^2+4})} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

(87) $\left(\log|x-\sqrt{x^2+9}|\right)' = \dfrac{1-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{x-\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{\sqrt{x^2+9}-x}{\sqrt{x^2+9}\,(x-\sqrt{x^2+9})} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$

(88) $\left(\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)' = \{\log(1-\cos x)-\log(1+\cos x)\}' = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}-\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}$

$$= \frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{\sin x+\sin x\cos x+\sin x-\sin x\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \frac{2\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{2\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$$

(89) $\left(\log\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)'$

$$= \frac{1}{\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}} \cdot \frac{(-\sin x+\cos x)\cdot(\cos x-\sin x)-(\cos x+\sin x)\cdot(-\sin x-\cos x)}{(\cos x-\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} \cdot \frac{(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$$

$$= \frac{2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)} = \frac{2}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{2}{\cos 2x}$$

(90) $\left(\log\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)' = \left\{\log x-\log(\sqrt{x^2+1}+1)\right\}' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+1}$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)-x^2}{x\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \frac{x^2+1+\sqrt{x^2+1}-x^2}{x\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

(91) $x>0$ のとき，$x^{\sqrt{x}} = e^{\log x^{\sqrt{x}}} = e^{\sqrt{x}\log x}$ であるから

$$\left(x^{\sqrt{x}}\right)' = \left(e^{\sqrt{x}\log x}\right)' = e^{\sqrt{x}\log x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\log x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\log x+2}{2\sqrt{x}}$$

(92) $x>0$ のとき，$x^{\tan x} = e^{\log x^{\tan x}} = e^{\tan x\log x}$ であるから

$$(x^{\tan x})' = \left(e^{\tan x\log x}\right)' = e^{\tan x\log x}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\log x+\tan x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\tan x}\left(\frac{\log x}{\cos^2 x}+\frac{\tan x}{x}\right)$$

(93) $x>1$ のとき，$(\log x)^{\sin x} = e^{\log(\log x)^{\sin x}} = e^{\sin x\log(\log x)}$ であるから

$$\left\{(\log x)^{\sin x}\right\}' = \left\{e^{\sin x\log(\log x)}\right\}' = e^{\sin x\log(\log x)}\cdot\left\{\cos x\cdot\log(\log x)+\sin x\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\log x}\right\}$$

$$= (\log x)^{\sin x}\left\{\cos x\log(\log x)+\frac{\sin x}{x\log x}\right\}$$

(94) $x<-1,\ 0<x$ のとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{\log(1+\frac{1}{x})^x} = e^{x\log(1+\frac{1}{x})}$ であるから

$$\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}' = \left\{e^{x\log(1+\frac{1}{x})}\right\}' = e^{x\log(1+\frac{1}{x})}\cdot\left\{1\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right\}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}$$

【問題 1.3】
次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．

(1) $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-2x+3}$

(3) $(4x^3+16x^2+10x+5)e^{-2x}$

(4) $\dfrac{2x^2+x-2}{x^2+x-2}$

(5) $\dfrac{x^3}{3}+x+2\log|x|$

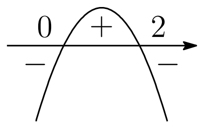
(6) $\dfrac{3x^2+1}{(x-1)^3}$

(7) $x+\sqrt{9-x^2}$

解答

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\cdot(x^2-x+1)-(x-1)\cdot(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{-x(x-2)}{(x^2-x+1)^2} \end{aligned}$$



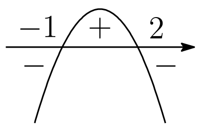

$f'(x)$ の分母は $(x^2-x+1)^2>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の $-x(x-2)$ が決める．分子 $-x(x-2)$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{3}$ | $\searrow$ |

$$\therefore \begin{cases} x=2 \text{ のとき極大値 } \dfrac{1}{3} \\ x=0 \text{ のとき極小値 } -1 \end{cases}$$

(2) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-2x+3}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\cdot(x^2-2x+3)-(2x-1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{-2(x+1)(x-2)}{(x^2-2x+3)^2} \end{aligned}$$



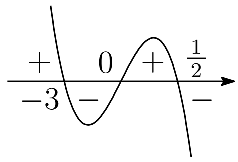

$f'(x)$ の分母は $(x^2-2x+3)^2>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の $-2(x+1)(x-2)$ が決める．分子 $-2(x+1)(x-2)$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ |

$$\therefore \begin{cases} x = 2 \text{ のとき極大値 } 1 \\ x = -1 \text{ のとき極小値 } -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(3) $f(x) = (4x^3 + 16x^2 + 10x + 5)e^{-2x}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= (12x^2 + 32x + 10) \cdot e^{-2x} + (4x^3 + 16x^2 + 10x + 5) \cdot (-2e^{-2x}) \\ &= (-8x^3 - 20x^2 + 12x)e^{-2x} \\ &= -4x(x+3)(2x-1)e^{-2x} \end{aligned}$$



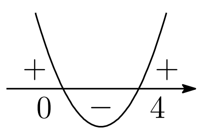

$e^{-2x} > 0$ であるから，$f'(x)$ の符号は $-4x(x+3)(2x-1)$ が決める．$-4x(x+3)(2x-1)$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $11e^6$ | $\searrow$ | $5$ | $\nearrow$ | $\frac{29}{2e}$ | $\searrow$ |

$$\therefore \begin{cases} x = -3 \text{ のとき極大値 } 11e^6 \\ x = 0 \text{ のとき極小値 } 5 \\ x = \dfrac{1}{2} \text{ のとき極大値 } \dfrac{29}{2e} \end{cases}$$

(4) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+1) \cdot (x^2 + x - 2) - (2x^2 + x - 2) \cdot (2x+1)}{(x^2 + x - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x}{(x^2 + x - 2)^2} \\ &= \frac{x(x-4)}{(x^2 + x - 2)^2} \end{aligned}$$



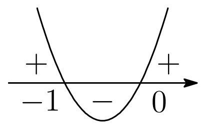

$f'(x)$ の分母は $(x^2 + x - 2)^2 > 0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の $x(x-4)$ が決める．分子 $x(x-4)$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $\frac{17}{9}$ | $\nearrow$ |

$$\therefore \begin{cases} x=0 \text{ のとき極大値 } 1 \\ x=4 \text{ のとき極小値 } \dfrac{17}{9} \end{cases}$$

(5) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x+2\log|x|$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2+1+\frac{2}{x} \\ &= \frac{x^3+x+2}{x} \\ &= \frac{x(x+1)(x^2-x+2)}{x^2} \end{aligned}$$



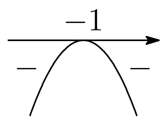

$f'(x)$ の分母は $x^2>0$ であり，分子において $x^2-x+2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子にある $x(x+1)$ が決める．分子にある $x(x+1)$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $-\frac{4}{3}$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

$$\therefore \begin{cases} x=-1 \text{ のとき極大値 } -\dfrac{4}{3} \\ \text{極小値なし} \end{cases}$$

(6) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{(x-1)^3}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x\cdot(x-1)^3-(3x^2+1)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} \\ &= \frac{3(x-1)^2\{2x(x-1)-(3x^2+1)\}}{(x-1)^6} \\ &= \frac{3(-x^2-2x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{-3(x+1)^2}{(x-1)^4} \end{aligned}$$




$f'(x)$ の分母は $(x-1)^4>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の $-3(x+1)^2$ が決める．分子の $-3(x+1)^2$ のグラフは上図のようになるから，$f'(x)$ の符号がわかる．よって，増減表は

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | | $\searrow$ |

$\therefore$ 極値なし

(7) $f(x)=x+\sqrt{9-x^2}$ とおくと

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{\sqrt{9-x^2}-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

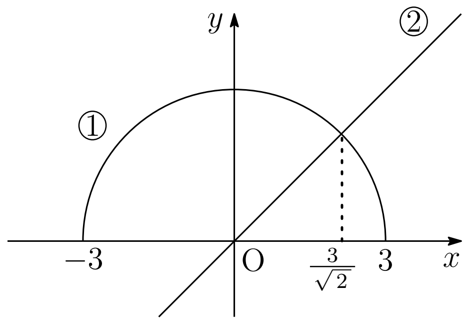
である．$f'(x)$ の分母は $\sqrt{9-x^2}>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の $\sqrt{9-x^2}-x$ が決める．このグラフをかくのではなく，曲線 $y=\sqrt{9-x^2}$ $\cdots$① と直線 $y=x$ $\cdots$② の上下関係で符合を決めにいく．ここで，① は

$$y^2=9-x^2 \quad \text{かつ} \quad y \geqq 0$$

すなわち

$$x^2+y^2=9 \quad \text{かつ} \quad y \geqq 0$$

であるから，原点中心，半径 3 の円の上半分である．よって，① と ② の概形は右図のようになる．




したがって，増減表は

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $\frac{3}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-3$ | $\nearrow$ | $3\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $3$ |

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ のとき極大値 } 3\sqrt{2} \\ \text{極小値なし} \end{cases}$$

**★L'Hospital（ロピタル）の定理**

$f(x), g(x)$ が $(a,b)$ で微分可能で，$g'(x)\neq 0$ $(a<x<b)$ のとき，

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a+0} g(x)=0, \quad \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

であれば

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

が成り立つ．

※ L'Hospital の定理にはいろいろな形があり，おおざっぱにいうと次のようになる．

$\dfrac{\lim_{x\to\square} f(x)}{\lim_{x\to\square} g(x)}$ が不定形，すなわち，$\dfrac{0}{0}$ や $\dfrac{(\pm)\infty}{(\pm)\infty}$ の形になるとき，$\displaystyle\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば，$\displaystyle\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が成り立つ．

【問題 1.4】
L'Hospital の定理を用いて，次の極限値を求めよ．ただし，不定形であることは述べなくてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{1-\cos x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+e^{-x}-1}{\sin x-x\cos x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^2\sin^2 x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x}{\tan^3 x}\right)$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{2}{x}\right)$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(\sin x)^x$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(\sin x)^{\frac{1}{\log x}}$

解答
今後，L'Hospital の定理を用いる部分を「$\overset{*}{=}$」で表すことにする．

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{1-\cos x}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 4\right)=1\cdot 1\cdot 4=4$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2\right\}=\frac{1}{3}\cdot 1^2=\frac{1}{3}$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\left\{1\cdot\log(1+x)+(1+x)\cdot\dfrac{1}{1+x}\right\}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\log(1+x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\log(1+x)}{x}\right\}=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}$$

(5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+e^{-x}-1}{\sin x-x\cos x}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-e^{-x}}{\cos x-\{1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)\}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{e^x}}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(1+x)e^x\sin x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{(1+x)e^x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{e^x-1-x}{x^2}\right\}=\frac{1}{1\cdot 1}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$$(6)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)\cos x}{2x(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{2(1+x)}\cdot\frac{1-(1+x)\cos x}{x}\right\}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)\cos x}{x}$$

$$\overset{*}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\{1\cdot\cos x+(1+x)\cdot(-\sin x)\}}{1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\{-\cos x+(1+x)\sin x\}=\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$

$$※\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x-\cos x\right)=\frac{1}{2}\cdot 0-1=-1$$

と計算することもできる.

$$(7)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^4}\right\}=1^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^4}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x+2\cdot\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}\right)$$

$$\overset{(3)}{=}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$$

$$(8)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}\right)\overset{(3)}{=}1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$(9)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x}{\tan^3 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 x-x^3}{x^2\tan^3 x}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\tan x}\right)^3\cdot\frac{\tan^3 x-x^3}{x^5}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\tan x}\right)^3\cdot\frac{(\tan x-x)(\tan^2 x+x\tan x+x^2)}{x^5}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\tan x}\right)^3\cdot\left\{\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}+1\right\}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}\right]\overset{(3)}{=}1^3\cdot(1^2+1+1)\cdot\frac{1}{3}=1$$

$$(10)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\right)\overset{(2)}{=}1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

$$(11)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^4}\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\right\}$$

$$\overset{(2)}{=}1^2\cdot(1+1)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$(12)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\sin^3 x}{x^2\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\cdot\frac{x^3-\sin^3 x}{x^5}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\cdot\frac{(x-\sin x)(x^2+x\sin x+\sin^2 x)}{x^5}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\cdot\left\{1+\frac{\sin x}{x}+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\right]\overset{(2)}{=}1^3\cdot(1+1+1^2)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$(13)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^2(e^x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3} \right\} = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3} \overset{*}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\{1 \cdot (e^x+1) + x \cdot e^x\} - 2e^x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(x-1)e^x + 1}{3x^2}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{xe^x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$$

(14) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x > 0$ であるから

$(\sin x)^x = e^{\log(\sin x)^x} = e^{x \log(\sin x)}$

ここで

$$\lim_{x \to +0} x \log(\sin x) = \lim_{x \to +0} \frac{\log(\sin x)}{\dfrac{1}{x}} \overset{*}{=} \lim_{x \to +0} \frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +0} \left( -\frac{x}{\tan x} \cdot x \right) = -1 \cdot 0 = 0$$

であるから，（指数関数の連続性より）

$\displaystyle\lim_{x \to +0} (\sin x)^x = \lim_{x \to +0} e^{x \log(\sin x)} = e^0 = 1$

(15) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos x > 0$ であるから

$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}}$

ここで

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} \overset{*}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{\tan x}{x} \right) = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

であるから，（指数関数の連続性より）

$\displaystyle\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(16) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x > 0$ であるから

$(\sin x)^{\frac{1}{\log x}} = e^{\log(\sin x)^{\frac{1}{\log x}}} = e^{\frac{\log(\sin x)}{\log x}}$

ここで

$$\lim_{x \to +0} \frac{\log(\sin x)}{\log x} \overset{*}{=} \lim_{x \to +0} \frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

であるから，（指数関数の連続性より）

$\displaystyle\lim_{x \to +0} (\sin x)^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x \to +0} e^{\frac{\log(\sin x)}{\log x}} = e^1 = e$

★逆三角関数

(1) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ の逆関数を arcsin（アークサイン）で表す.

(2) $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ の逆関数を arccos （アークコサイン）で表す.

(3) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ の逆関数を arctan（アークタンジェント）で表す.

※ $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$ とは，$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ を満たす角 $\theta$ のことである．角 $\theta$ を $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ から見つけなければいけないことに注意する．arccos, arctan のときは，角 $\theta$ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ からそれぞれ見つけなければいけない.

【問題 1.5】
次の値を求めよ.

(1) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$

(3) $\arcsin(-1)$

(4) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$

(6) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(7) $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) $\arctan(-1)$

(9) $\sin \left(\arctan \frac{12}{5}\right)$

(10) $\tan \left(\arccos \frac{1}{8}\right)$

(11) $\arccos \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)$

(12) $\arctan \left(\tan \frac{4}{7}\pi\right)$

(13) $\arctan \frac{2}{9} + \arctan \frac{7}{11}$

(14) $\arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{8}$

(15) $2\arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{18}$

解答

(1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ をみたす角 $\theta$ を $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲から見つけて　$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

(2) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ をみたす角 $\theta$ を $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲から見つけて　$\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

(3) $\sin\theta = -1$ をみたす角 $\theta$ を $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲から見つけて　$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

(4) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす角 $\theta$ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲から見つけて　$\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

(5) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ をみたす角 $\theta$ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲から見つけて　$\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$

(6) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をみたす角 $\theta$ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲から見つけて　$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5}{6}\pi$

(7) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ をみたす角 $\theta$ を $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲から見つけて　$\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$

(8) $\tan\theta = -1$ をみたす角 $\theta$ を $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲から見つけて　$\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

(9) $\arctan\dfrac{12}{5} = \alpha$ とおくと　$\tan\alpha = \dfrac{12}{5}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

底辺が 5，高さが 12 の直角三角形の斜辺は 13 であるから　$\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$

よって　$\sin\left(\arctan\dfrac{12}{5}\right) = \dfrac{12}{13}$

(10) $\arccos\dfrac{1}{8} = \alpha$ とおくと　$\cos\alpha = \dfrac{1}{8}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

斜辺が 8，底辺が 1 の直角三角形の高さは $3\sqrt{7}$ であるから　$\tan\alpha = 3\sqrt{7}$

よって　$\tan\left(\arccos\dfrac{1}{8}\right) = 3\sqrt{7}$

(11) $\sin\dfrac{\pi}{5} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{5}\right) = \cos\dfrac{3}{10}\pi$ であって，$\dfrac{3}{10}\pi$ は $[0, \pi]$ に入る．

よって　$\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{3}{10}\pi$

(12) $\tan\dfrac{4}{7}\pi = \tan\left(\dfrac{4}{7}\pi - \pi\right) = \tan\left(-\dfrac{3}{7}\pi\right)$ であって，$-\dfrac{3}{7}\pi$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に入る．

よって　$\arctan\left(\tan\dfrac{4}{7}\pi\right) = -\dfrac{3}{7}\pi$

※ $\dfrac{4}{7}\pi$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に入らないから，$\arctan\left(\tan\dfrac{4}{7}\pi\right) = \dfrac{4}{7}\pi$ とはならないことに注意する．

(13) $\arctan\dfrac{2}{9} = \alpha,\ \arctan\dfrac{7}{11} = \beta$ とおくと　$\tan\alpha = \dfrac{2}{9},\ \tan\beta = \dfrac{7}{11}$ $\left(0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{4}\right)$

このとき

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{2}{9} + \dfrac{7}{11}}{1 - \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{7}{11}} = \frac{22 + 63}{99 - 14} = \frac{85}{85} = 1$$

ここで，$0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき $0 < \alpha + \beta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$

よって　$\arctan\dfrac{2}{9} + \arctan\dfrac{7}{11} = \dfrac{\pi}{4}$

(14) $\arctan\dfrac{3}{4} = \alpha,\ \arctan\dfrac{1}{8} = \beta$ とおくと　$\tan\alpha = \dfrac{3}{4},\ \tan\beta = \dfrac{1}{8}$ $\left(0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{4}\right)$

このとき

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{8}}{1 - \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{8}} = \frac{24 + 4}{32 - 3} = \frac{28}{29}$$

ここで，$0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき $0 < \alpha + \beta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\alpha + \beta = \arctan \dfrac{28}{29}$

よって　$\arctan \dfrac{3}{4} + \arctan \dfrac{1}{8} = \arctan \dfrac{28}{29}$

(15) $\arctan \dfrac{1}{2} = \alpha,\ \arctan \dfrac{1}{5} = \beta,\ \arctan \dfrac{1}{18} = \gamma$ とおくと

$\tan \alpha = \dfrac{1}{2},\ \tan \beta = \dfrac{1}{5},\ \tan \gamma = \dfrac{1}{18}\ \left(0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{4}\right)$

このとき

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}$$

$$\tan(2\alpha - \beta) = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{20-3}{15+4} = \frac{17}{19}$$

$$\tan(2\alpha - \beta + \gamma) = \frac{\frac{17}{19} + \frac{1}{18}}{1 - \frac{17}{19} \cdot \frac{1}{18}} = \frac{306+19}{342-17} = \frac{325}{325} = 1$$

ここで，$0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{4}$ のとき $-\dfrac{\pi}{4} < 2\alpha - \beta + \gamma < \dfrac{3}{4}\pi$ であるから　$2\alpha - \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{4}$

よって　$2\arctan \dfrac{1}{2} - \arctan \dfrac{1}{5} + \arctan \dfrac{1}{18} = \dfrac{\pi}{4}$

## ★逆三角関数の導関数

(1) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad (-1 < x < 1)$

(2) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad (-1 < x < 1)$

(3) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}\quad (x \in \mathbb{R})$

**【問題 1.6】**

次の関数を微分せよ．

(1) $\arctan e^x$

(2) $\arctan \dfrac{2}{x}$

(3) $\arcsin \sqrt{x}$

(4) $\sqrt{x} \arctan \sqrt{x}$

(5) $\arctan \sqrt{x^2-1}$

(6) $\arctan \dfrac{3+x}{1-3x}$

(7) $\arctan \dfrac{2x+5}{5x-2}$

(8) $\arctan \dfrac{3x+4}{4x-3}$

(9) $\arctan \dfrac{2x+5}{x+1}$ (10) $\arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

(11) $\arctan \sqrt{\dfrac{x+5}{x+1}}$ (12) $\arctan \sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+1}}$

(13) $\arctan \sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-3}}$ (14) $\arctan \sqrt{\dfrac{2x+7}{5x-1}}$

(15) $\arctan \sqrt{\dfrac{3x-4}{7x+5}}$ (16) $\arctan \sqrt{\dfrac{5x+11}{2x-3}}$

(17) $\arctan \sqrt{\dfrac{7x-9}{2x+1}}$ (18) $\arctan \sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}$

(19) $\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$ (20) $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

(21) $\dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ (22) $\arctan(x+\sqrt{x^2+1})$

(23) $\arctan \dfrac{2x}{x^2-1}$ (24) $\arctan \dfrac{1-2x-x^2}{1+2x-x^2}$

(25) $\arcsin \sqrt{1-x^2}$ (26) $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(27) $\arccos \dfrac{2x}{x^2+1}$ (28) $\arctan \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

解答

(1) $(\arctan e^x)' = \dfrac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

(2) $\left(\arctan \dfrac{2}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{2}{x^2}\right) = -\dfrac{2}{x^2+4}$

(3) $(\arcsin \sqrt{x})' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

(4) $(\sqrt{x} \arctan \sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \arctan \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \left\{\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right\}$

$= \dfrac{\arctan \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2(1+x)} = \dfrac{(1+x)\arctan \sqrt{x} + \sqrt{x}}{2(1+x)\sqrt{x}}$

(5) $\left(\arctan \sqrt{x^2-1}\right)' = \dfrac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2} \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(6) $\left(\arctan \dfrac{3+x}{1-3x}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{3+x}{1-3x}\right)^2} \cdot \dfrac{1\cdot(1-3x)-(3+x)\cdot(-3)}{(1-3x)^2}$

$= \dfrac{(1-3x)^2}{(1-3x)^2+(3+x)^2} \cdot \dfrac{10}{(1-3x)^2} = \dfrac{10}{10(1+x^2)} = \dfrac{1}{1+x^2}$

(7) $\displaystyle \left(\arctan\frac{2x+5}{5x-2}\right)' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{2x+5}{5x-2}\right)^2}\cdot\frac{2\cdot(5x-2)-(2x+5)\cdot 5}{(5x-2)^2}$

$\displaystyle = \frac{(5x-2)^2}{(5x-2)^2+(2x+5)^2}\cdot\frac{-29}{(5x-2)^2} = \frac{-29}{29(1+x^2)} = -\frac{1}{1+x^2}$

(8) $\displaystyle \left(\arctan\frac{3x+4}{4x-3}\right)' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{3x+4}{4x-3}\right)^2}\cdot\frac{3\cdot(4x-3)-(3x+4)\cdot 4}{(4x-3)^2}$

$\displaystyle = \frac{(4x-3)^2}{(4x-3)^2+(3x+4)^2}\cdot\frac{-25}{(4x-3)^2} = \frac{-25}{25(1+x^2)} = -\frac{1}{1+x^2}$

(9) $\displaystyle \left(\arctan\frac{2x+5}{x+1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{2x+5}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{2\cdot(x+1)-(2x+5)\cdot 1}{(x+1)^2}$

$\displaystyle = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(2x+5)^2}\cdot\frac{-3}{(x+1)^2} = \frac{-3}{5x^2+22x+26}$

(10) $\displaystyle \left(\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}}\cdot\frac{-1\cdot x-(1-x)\cdot 1}{x^2}\right\}$

$\displaystyle = \frac{x}{x+(1-x)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

(11) $\displaystyle \left(\arctan\sqrt{\frac{x+5}{x+1}}\right)' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{x+5}{x+1}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+5}{x+1}}}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-(x+5)\cdot 1}{(x+1)^2}\right\}$

$\displaystyle = \frac{x+1}{(x+1)+(x+5)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x+5}}\cdot\frac{-4}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{2(x+3)}\cdot\frac{-2}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x+5}}$

$\displaystyle = -\frac{1}{(x+3)(x+1)}\sqrt{\frac{x+1}{x+5}}$

※ $\displaystyle \sqrt{\frac{x+5}{x+1}}$ を $\displaystyle \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+1}}$ とはできないし，答えの分母の $x+1$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(12) $\displaystyle \left(\arctan\sqrt{\frac{3x-2}{2x+1}}\right)'$

$\displaystyle = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+1}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+1}}}\cdot\frac{3\cdot(2x+1)-(3x-2)\cdot 2}{(2x+1)^2}\right\}$

$\displaystyle = \frac{2x+1}{(2x+1)+(3x-2)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+1}{3x-2}}\cdot\frac{7}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1}{5x-1}\cdot\frac{7}{2(2x+1)^2}\sqrt{\frac{2x+1}{3x-2}}$

$$= \frac{7}{2(5x-1)(2x+1)}\sqrt{\frac{2x+1}{3x-2}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+1}}$ を $\dfrac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+1}}$ とはできないし，答えの分母の $2x+1$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(13) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-3}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-3}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-3}}}\cdot\frac{3\cdot(2x-3)-(3x+4)\cdot 2}{(2x-3)^2}\right\}$$

$$= \frac{2x-3}{(2x-3)+(3x+4)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x-3}{3x+4}}\cdot\frac{-17}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3}{5x+1}\cdot\frac{-17}{2(2x-3)^2}\sqrt{\frac{2x-3}{3x+4}}$$

$$= \frac{-17}{2(5x+1)(2x-3)}\sqrt{\frac{2x-3}{3x+4}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-3}}$ を $\dfrac{\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x-3}}$ とはできないし，答えの分母の $2x-3$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(14) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{2x+7}{5x-1}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{2x+7}{5x-1}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x+7}{5x-1}}}\cdot\frac{2\cdot(5x-1)-(2x+7)\cdot 5}{(5x-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{5x-1}{(5x-1)+(2x+7)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5x-1}{2x+7}}\cdot\frac{-37}{(5x-1)^2} = \frac{5x-1}{7x+6}\cdot\frac{-37}{2(5x-1)^2}\sqrt{\frac{5x-1}{2x+7}}$$

$$= \frac{-37}{2(7x+6)(5x-1)}\sqrt{\frac{5x-1}{2x+7}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{2x+7}{5x-1}}$ を $\dfrac{\sqrt{2x+7}}{\sqrt{5x-1}}$ とはできないし，答えの分母の $5x-1$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(15) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{3x-4}{7x+5}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{3x-4}{7x+5}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x-4}{7x+5}}}\cdot\frac{3\cdot(7x+5)-(3x-4)\cdot 7}{(7x+5)^2}\right\}$$

$$= \frac{7x+5}{(7x+5)+(3x-4)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7x+5}{3x-4}}\cdot\frac{43}{(7x+5)^2} = \frac{7x+5}{10x+1}\cdot\frac{43}{2(7x+5)^2}\sqrt{\frac{7x+5}{3x-4}}$$

$$= \frac{43}{2(10x+1)(7x+5)}\sqrt{\frac{7x+5}{3x-4}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{3x-4}{7x+5}}$ を $\dfrac{\sqrt{3x-4}}{\sqrt{7x+5}}$ とはできないし，答えの分母の $7x+5$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(16) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{5x+11}{2x-3}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{5x+11}{2x-3}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{5x+11}{2x-3}}}\cdot\frac{5\cdot(2x-3)-(5x+11)\cdot 2}{(2x-3)^2}\right\}$$

$$= \frac{2x-3}{(2x-3)+(5x+11)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x-3}{5x+11}}\cdot\frac{-37}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3}{7x+8}\cdot\frac{-37}{2(2x-3)^2}\sqrt{\frac{2x-3}{5x+11}}$$

$$= \frac{-37}{2(7x+8)(2x-3)}\sqrt{\frac{2x-3}{5x+11}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{5x+11}{2x-3}}$ を $\dfrac{\sqrt{5x+11}}{\sqrt{2x-3}}$ とはできないし，答えの分母の $2x-3$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(17) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{7x-9}{2x+1}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{7x-9}{2x+1}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{7x-9}{2x+1}}}\cdot\frac{7\cdot(2x+1)-(7x-9)\cdot 2}{(2x+1)^2}\right\}$$

$$= \frac{2x+1}{(2x+1)+(7x-9)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+1}{7x-9}}\cdot\frac{25}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1}{9x-8}\cdot\frac{25}{2(2x+1)^2}\sqrt{\frac{2x+1}{7x-9}}$$

$$= \frac{25}{2(9x-8)(2x+1)}\sqrt{\frac{2x+1}{7x-9}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{7x-9}{2x+1}}$ を $\dfrac{\sqrt{7x-9}}{\sqrt{2x+1}}$ とはできないし，答えの分母の $2x+1$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(18) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}\right)'$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}\right)^2}\cdot\left\{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}}\cdot\frac{2\cdot(7x+11)-(2x-9)\cdot 7}{(7x+11)^2}\right\}$$

$$= \frac{7x+11}{(7x+11)+(2x-9)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7x+11}{2x-9}}\cdot\frac{85}{(7x+11)^2} = \frac{7x+11}{9x+2}\cdot\frac{85}{2(7x+11)^2}\sqrt{\frac{7x+11}{2x-9}}$$

$$= \frac{85}{2(9x+2)(7x+11)}\sqrt{\frac{7x+11}{2x-9}}$$

※ $\sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}$ を $\dfrac{\sqrt{2x-9}}{\sqrt{7x+11}}$ とはできないし，答えの分母の $7x+11$ をルートの中に入れることもできないことに注意する．

(19) $$\left(\frac{\arcsin x}{\arccos x}\right)' = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arccos x - \arcsin x\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arccos x)^2} = \frac{\arccos x + \arcsin x}{(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

(20) $$\left(\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2} - \arccos x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1+\dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{1-x^2}+x\arccos x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

(21) $$\left(\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{(x\arcsin x)'\cdot\sqrt{1-x^2} - x\arcsin x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{\left(1\cdot\arcsin x + x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + \dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{(1-x^2)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}+x^2\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

(22) $$\left\{\arctan(x+\sqrt{x^2+1})\right\}' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{x^2+1})^2}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{1+(x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2(x^2+1)+2x\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2(x^2+1)}$$

(23) $$\left(\arctan\frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^2}\cdot\frac{2\cdot(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(x^2-1)^2}{(x^2-1)^2+(2x)^2}\cdot\frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{x^2+1}$$

(24) $$\left(\arctan\frac{1-2x-x^2}{1+2x-x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+\left(\dfrac{1-2x-x^2}{1+2x-x^2}\right)^2}\cdot\frac{(-2-2x)\cdot(1+2x-x^2)-(1-2x-x^2)\cdot(2-2x)}{(1+2x-x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+2x-x^2)^2}{(1+2x-x^2)^2+(1-2x-x^2)^2}\cdot\frac{-4(1+x^2)}{(1+2x-x^2)^2} = \frac{-4(1+x^2)}{2(1+x^2)^2} = \frac{-2}{1+x^2}$$

(25) $\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

※ $\sqrt{x^2}=x$ とはならないことに注意する．

(26) $\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}\cdot\left(-\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\right)$

$= -\sqrt{\dfrac{x^2+1}{(x^2+1)-1}}\cdot\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\cdot\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$= -\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}\cdot\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{|x|(x^2+1)}$

※ $\sqrt{x^2}=x$ とはならないことに注意する．

(27) $\left(\arccos\dfrac{2x}{x^2+1}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2}}\cdot\dfrac{2\cdot(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$= -\sqrt{\dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2-(2x)^2}}\cdot\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{x^2+1}{\sqrt{(x^2-1)^2}}\cdot\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}$

※ $\sqrt{(x^2-1)^2}=x^2-1$ とはならないことに注意する．

(28) $\left(\arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)'$

$= \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2}\cdot\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\dfrac{\sin x\cdot(1+\cos x)-(1-\cos x)\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\right\}$

$= \dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)+(1-\cos x)}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\cdot\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

$= \dfrac{1+\cos x}{2}\cdot\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \dfrac{\sin x}{2(1+\cos x)}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

$= \dfrac{\sin x}{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2(1-\cos x)}} = \dfrac{\sin x}{2}\sqrt{\dfrac{1}{1-\cos^2 x}} = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\sin^2 x}} = \dfrac{\sin x}{2|\sin x|}$

※ $\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$ とはならないことに注意する．

**【問題 1.7】**

L'Hospital の定理を用いて，次の極限値を求めよ．ただし，不定形であることは述べなくてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x-\arctan x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{(\arccos x)^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

解答

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2} = 1$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x-\arctan x} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)(\sqrt{1-x^2}-1)}{\sqrt{1-x^2}\{(1+x^2)-1\}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\{(1-x^2)-1\}}{x^2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2(1+x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)} = \frac{-1}{1\cdot(1+1)} = -\frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{(\arccos x)^2} \overset{*}{=} \lim_{x\to 1-0}\frac{-1}{2\arccos x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)} = \lim_{x\to 1-0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\arccos x}$

$\displaystyle \overset{*}{=} \lim_{x\to 1-0}\frac{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)} = \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

(4) $x>0$ のとき，$\arctan x>0$ であるから

$\displaystyle \left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = e^{\log(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x} = e^{x\log(\frac{2}{\pi}\arctan x)}$

ここで

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\dfrac{1}{x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\frac{2}{\pi}\arctan x}\cdot\dfrac{\frac{2}{\pi}}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{(1+x^2)\arctan x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\arctan x} = \frac{-1}{1\cdot\dfrac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

であるから,（指数関数の連続性より）

$\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log(\frac{2}{\pi}\arctan x)} = e^{-\frac{2}{\pi}}$

**【問題 1.8】**

次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=(\arctan x)^2$ のとき $(1+x^2)f''(x)+2xf'(x)$ を簡単にせよ．

(2) $f(x)=\arcsin x\arccos x$ のとき $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)$ を簡単にせよ．

(3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$ のとき $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+f(x)$ を簡単にせよ．

解答

(1) $f'(x)=2\arctan x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

分母をはらうと

$(1+x^2)f'(x)=2\arctan x$

両辺を $x$ で微分すると

$2x\cdot f'(x)+(1+x^2)\cdot f''(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$

よって

$(1+x^2)f''(x)+2xf'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$

※ $f'(x)=\dfrac{2\arctan x}{1+x^2}$ と $f''(x)=\dfrac{2-4x\arctan x}{(1+x^2)^2}$ を求めてから代入してもよい.

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arccos x+\arcsin x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

分母をはらうと

$\sqrt{1-x^2}\,f'(x)=\arccos x-\arcsin x$

両辺を $x$ で微分すると

$\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot f'(x)+\sqrt{1-x^2}\cdot f''(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\dfrac{-xf'(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}\,f''(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

分母をはらうと

$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=-2$

よって

$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=-2$

※ $f'(x)=\dfrac{\arccos x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ と $f''(x)=\dfrac{-2\sqrt{1-x^2}+x(\arccos x-\arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ を求めてから代入してもよい.

(3) $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

両辺に $1-x^2$ をかけると

$(1-x^2)f'(x)=-x\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x+1-x^2$

$(1-x^2)f'(x)=-xf(x)+1-x^2$

両辺を $x$ で微分すると

$-2x\cdot f'(x)+(1-x^2)\cdot f''(x)=-\{1\cdot f(x)+x\cdot f'(x)\}-2x$

よって

$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+f(x)=-2x$

※ $f'(x)=\dfrac{-x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+1$ と $f''(x)=\dfrac{-\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ を求めてから代入してもよい.

## ★高次導関数

開区間 $I$ で微分可能な関数 $f$ の導関数 $f'$ が再び $I$ で微分可能なとき，$(f')'$ を $f$ の**第 2 次導関数**といい，$f''$ で表す．一般に，$f$ を $n$ 回微分した関数を $f$ の**第 $\boldsymbol{n}$ 次導関数**といい，$f^{(n)}$ で表す．また，$f^{(0)} = f$ と定める．そして，$f^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ がすべて $I$ で連続であるとき，$f$ は $I$ で $\boldsymbol{C^n}$ **級**であるという．

例

(1) $(e^x)^{(n)} = e^x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

※ $(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x,\ (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

※ $(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x,\ (\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(4) $\{\log(1+x)\}^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$

(5) $\{(1+x)^\alpha\}^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ $(n \in \mathbb{N})$

## ★Leibniz（ライプニッツ） の公式

$f, g$ が開区間 $I$ で $n$ 回微分可能なとき，積 $fg$ も $I$ で $n$ 回微分可能で

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad (x \in I)$$

が成り立つ．

証明

(i) $n = 1$ のとき，主張は積の微分法則に他ならないから成り立つ．

(ii) $n = m$ $(m \in \mathbb{N})$ のとき主張が成り立つと仮定する．
$f, g$ が $I$ で $m+1$ 回微分可能なとき，$f, g$ は $I$ で $m$ 回微分可能でもあるから，帰納法の仮定より，積 $fg$ は $I$ で $m$ 回微分可能で

$$\{f(x)g(x)\}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad (x \in I)$$

が成り立つ．この右辺はもう 1 回微分できるから，積 $fg$ は $I$ で $m+1$ 回微分可能で，$x \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
&\{f(x)g(x)\}^{(m+1)} \\
= \ &\left\{\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x)\right\}' \\
= \ &\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k \left\{f^{(m-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(m-k)}(x) g^{(k+1)}(x)\right\} \\
= \ &\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k)}(x) g^{(k+1)}(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{m+1} {}_m\mathrm{C}_{k-1} f^{(m-(k-1))}(x)g^{(k)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x) \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_{k-1} f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(m+1)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{m} ({}_m\mathrm{C}_k + {}_m\mathrm{C}_{k-1}) f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(m+1)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{m} {}_{m+1}\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(m+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x)
\end{aligned}
$$

よって，$n = m+1$ のときも主張が成り立つ．

以上 (i),(ii) より，$n \in \mathbb{N}$ に対して主張が成り立つ．　■

※対称性より

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \quad (x \in I)$$

でもよい．

**【問題 1.9】**

$f(x) = \arctan x$ のとき，$f^{(n)}(0)$ を求めよ．

解答

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ であるから　$(1+x^2)f'(x) = 1$

この両辺を $n$ 回微分すると

$$\{(1+x^2)f'(x)\}^{(n)} = (1)^{(n)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (1+x^2)^{(k)}\{f'(x)\}^{(n-k)} = 0$$

$$\underbrace{1\cdot(1+x^2)\cdot f^{(n+1)}(x)}_{k=0} + \underbrace{n\cdot 2x\cdot f^{(n)}(x)}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot 2\cdot f^{(n-1)}(x)}_{k=2} = 0$$

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

$x = 0$ を代入すると

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1)f^{(n-1)}(0) = 0$$

であるから

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0) \quad \cdots\cdots①$$

さて，$f^{(0)}(0)=f(0)=0,\ f^{(1)}(0)=f'(0)=1$ である．あとは，① を用いて次々と求める．

① で $n=1$ とすると　$f^{(2)}(0)=-1\cdot 0\cdot f^{(0)}(0)=-1\cdot 0\cdot 0=0$

① で $n=2$ とすると　$f^{(3)}(0)=-2\cdot 1\cdot f^{(1)}(0)=-2\cdot 1\cdot 1=-2!$

① で $n=3$ とすると　$f^{(4)}(0)=-3\cdot 2\cdot f^{(2)}(0)=-3\cdot 2\cdot 0=0$

① で $n=4$ とすると　$f^{(5)}(0)=-4\cdot 3\cdot f^{(3)}(0)=-4\cdot 3\cdot(-2!)=4!$

① で $n=5$ とすると　$f^{(6)}(0)=-5\cdot 4\cdot f^{(4)}(0)=-5\cdot 4\cdot 0=0$

① で $n=6$ とすると　$f^{(7)}(0)=-6\cdot 5\cdot f^{(5)}(0)=-6\cdot 5\cdot 4!=-6!$

同様に計算すれば

$$f^{(2n)}(0)=0,\quad f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!\quad (n=0,1,2,\dots)$$

となることがわかる．

**【問題 1.10】**

$f(x)=e^x\sqrt{1-x}$ のとき，$f^{(0)}(0),f^{(1)}(0),f^{(2)}(0),f^{(3)}(0),f^{(4)}(0),f^{(5)}(0)$ を求めよ．

解答

$f^{(0)}(0)=f(0)=1$ である．また

$$f'(x)=e^x\cdot\sqrt{1-x}+e^x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{(1-2x)e^x}{2\sqrt{1-x}}\quad\cdots\cdots①$$

より $f^{(1)}(0)=f'(0)=\dfrac{1}{2}$ である．

次に，① より

$$(2-2x)f'(x)=(1-2x)f(x)$$

が成り立つことがわかるから，この両辺を $n$ 回微分すると

$$\{(2-2x)f'(x)\}^{(n)}=\{(1-2x)f(x)\}^{(n)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(2-2x)^{(k)}\{f'(x)\}^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(1-2x)^{(k)}\{f(x)\}^{(n-k)}$$

$$\underbrace{1\cdot(2-2x)\cdot f^{(n+1)}(x)}_{k=0}+\underbrace{n\cdot(-2)\cdot f^{(n)}(x)}_{k=1}=\underbrace{1\cdot(1-2x)\cdot f^{(n)}(x)}_{k=0}+\underbrace{n\cdot(-2)\cdot f^{(n-1)}(x)}_{k=1}$$

$$(2-2x)f^{(n+1)}(x)-2nf^{(n)}(x)=(1-2x)f^{(n)}(x)-2nf^{(n-1)}(x)$$

$x=0$ を代入すると

$$2f^{(n+1)}(0)-2nf^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)-2nf^{(n-1)}(0)$$

であるから

$$f^{(n+1)}(0)=\frac{1}{2}\left\{(2n+1)f^{(n)}(0)-2nf^{(n-1)}(0)\right\}\quad\cdots\cdots②$$

あとは ② を用いて次々と求める．

① で $n=1$ とすると　$f^{(2)}(0)=\dfrac{1}{2}\left(3\cdot\dfrac{1}{2}-2\cdot 1\right)=-\dfrac{1}{4}$

① で $n=2$ とすると　$f^{(3)}(0)=\dfrac{1}{2}\left\{5\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)-4\cdot\dfrac{1}{2}\right\}=-\dfrac{13}{8}$

① で $n=3$ とすると　$f^{(4)}(0)=\dfrac{1}{2}\left\{7\cdot\left(-\dfrac{13}{8}\right)-6\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right\}=-\dfrac{79}{16}$

① で $n=4$ とすると　$f^{(5)}(0)=\dfrac{1}{2}\left\{9\cdot\left(-\dfrac{79}{16}\right)-8\cdot\left(-\dfrac{13}{8}\right)\right\}=-\dfrac{503}{32}$

**★Taylor（テイラー） の定理**

$f$ が開区間 $I$ で $n$ 回微分可能で，$a, x \in I$ $(x \neq a)$ のとき

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

をみたす $\theta$ $(0<\theta<1)$ が存在する．

※ $f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を**剰余項**といい，$R_n(x)$ で表す．この場合

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\quad(0<\theta<1)$$

であり，これを **Lagrange（ラグランジュ） の剰余項**という．また

$$R_n(x)=\frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}(x-a)^n\quad(0<\theta<1)$$

を **Cauchy の剰余項**といい，$p>0$ として

$$R_n(x)=\frac{(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n\quad(0<\theta<1)$$

を **Roche-Schlömilch（ロッシュ シュレミルヒ） の剰余項**という．Roche-Schlömilch の剰余項において，$p=1$ のときが Cauchy の剰余項，$p=n$ のときが Lagrange の剰余項である．剰余項の形は他にもいろいろある．

**定理**

$f$ が開区間 $I$ で無限回微分可能で，$a\in I$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ をみたす $x\in I$ に対しては

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と級数で表せる．

※これを $f$ の $a$ を中心とする **Taylor 展開**という．特に，$a=0$ のときを **Maclaurin（マクローリン） 展開**という．

**★代表的な関数の Maclaurin 展開**

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+\cdots\quad(x\in\mathbb{R})$

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{5040}+\dfrac{x^9}{362880}-\cdots\quad(x\in\mathbb{R})$

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^8}{40320} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$

(4) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \end{pmatrix} x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

ただし，$\alpha \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$ とし，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

は一般二項係数である．

(6) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4 + \dfrac{7}{256}x^5 - \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{5}{16}x^3 + \dfrac{35}{128}x^4 - \dfrac{63}{256}x^5 + \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$

(8) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

(9) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} - \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

(10) $\arcsin x = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + \dfrac{5}{112}x^7 + \dfrac{35}{1152}x^9 + \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

【問題 1.11】

次の関数の Maclaurin 展開の 4 次以下の項を求めよ．ただし，係数は既約分数にすること．また，展開できる範囲は述べなくてよい．

(1) $e^{-3x}$

(2) $\sin 5x - \cos 2x$

(3) $(1+2x-3x^2+x^3)\arctan x$

(4) $\dfrac{\arcsin x}{1+x}$

(5) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$

(6) $e^x\sqrt{1-x}$

(7) $\sqrt{1+x+x^2}$

(8) $\log\left(1 + x - \dfrac{x^2}{3}\right)$

解答

(1) $e^x$ の Maclaurin 展開の式において $x$ を $-3x$ におきかえる．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$\begin{aligned} e^{-3x} &= 1 + (-3x) + \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{6} + \frac{(-3x)^4}{24} + \cdots \\ &= 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 - \cdots \end{aligned}$$

(2) $\sin x,\ \cos x$ の Maclaurin 展開の式において $x$ をそれぞれ $5x,\ 2x$ におきかえる．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$
\begin{aligned}
\sin 5x - \cos 2x &= \left\{5x - \frac{(5x)^3}{6} + \cdots\right\} - \left\{1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \cdots\right\} \\
&= \left(5x - \frac{125}{6}x^3 + \cdots\right) - \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \cdots\right) \\
&= -1 + 5x + 2x^2 - \frac{125}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

(3) $\arctan x$ の Maclaurin 展開の式に $1 + 2x - 3x^2 + x^3$ をかける．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$
\begin{aligned}
(1 + 2x - 3x^2 + x^3)\arctan x &= (1 + 2x - 3x^2 + x^3)\left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right) \\
&= x \qquad\qquad - \frac{1}{3}x^3 \qquad\qquad + \cdots \\
&\qquad + 2x^2 \qquad\qquad - \frac{2}{3}x^4 + \cdots \\
&\qquad\qquad - 3x^3 \qquad\qquad + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad + x^4 + \cdots \\
&= x + 2x^2 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

(4) $\arcsin x$ と $\dfrac{1}{1+x}$ の Maclaurin 展開の式をかける．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\arcsin x}{1+x} &= \left(x + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots) \\
&= x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots \\
&= x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

(5) $\cos x$ と $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ の Maclaurin 展開の式をかける．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^4 + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{49}{384}x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

(6) $e^x$ の Maclaurin 展開の式と，$\sqrt{1+x}$ の Maclaurin 展開の式において $x$ を $-x$ におきかえた式をかける．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$
\begin{aligned}
e^x\sqrt{1-x} &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\cdots\right)\\
&= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots\\
&\quad + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \cdots\\
&\quad + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \cdots\\
&\quad + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \cdots\\
&\quad + \frac{1}{24}x^4 + \cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{13}{48}x^3-\frac{79}{384}x^4+\cdots
\end{aligned}
$$

(7) $\sqrt{1+x}$ の Maclaurin 展開の式において $x$ を $x+x^2$ におきかえる．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x+x^2} &= 1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}(x+x^2)^2+\frac{1}{16}(x+x^2)^3-\frac{5}{128}(x+x^2)^4+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}(x^2+2x^3+x^4)+\frac{1}{16}(x^3+3x^4+\cdots)\\
&\qquad -\frac{5}{128}(x^4+\cdots)+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{16}x^4-\frac{5}{128}x^4+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+\frac{3}{128}x^4+\cdots
\end{aligned}
$$

(8) $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開の式において $x$ を $x-\dfrac{x^2}{3}$ におきかえる．そのとき，5 次以上の項は省略すれば

$$
\begin{aligned}
\log\left(1+x-\frac{x^2}{3}\right) &= \left(x-\frac{x^2}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\left(x-\frac{x^2}{3}\right)^4+\cdots\\
&= \left(x-\frac{1}{3}x^2\right)-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{9}x^4\right)+\frac{1}{3}(x^3-x^4+\cdots)\\
&\qquad -\frac{1}{4}(x^4+\cdots)+\cdots\\
&= x-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{18}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{4}x^4+\cdots\\
&= x-\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{23}{36}x^4+\cdots
\end{aligned}
$$

## §2.　1 変数関数の積分

★原始関数

区間 $I$ で定義された関数 $f(x)$ に対して，$I$ で $F'(x) = f(x)$ をみたす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．そして，$f(x)$ の原始関数（全体）を

$$\int f(x)dx$$

で表す．

※ $F_1(x)$ と $F_2(x)$ を $f(x)$ の原始関数とするとき，$I$ で

$$\{F_1(x) - F_2(x)\}' = {F_1}'(x) - {F_2}'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

が成り立つから，平均値の定理より，$F_1(x) - F_2(x)$ は $I$ で定数である．よって，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数のひとつとするとき，任意の原始関数は定数 $C$ を用いて

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

で与えられる．この定数 $C$ を**積分定数**という．積分計算だけのときは，積分定数を省略することがある．

★代表的な原始関数

(1) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$

(3) $\displaystyle\int e^x dx = e^x$

(4) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x$

(5) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x}$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

※定数 $A\ (\neq 0)$, $B$ に対して

$$\int e^{Ax+B}dx = \frac{1}{A}e^{Ax+B}$$

$$\int \sin(Ax+B)dx = -\frac{1}{A}\cos(Ax+B)$$

などが成り立つ（他も同様）．

【問題 2.1】
次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \left(x^4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx$ (2) $\displaystyle\int \left(3 - \frac{5}{x}\right)\left(4x^2 - 1 - \frac{2}{x}\right) dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2} dx$ (4) $\displaystyle\int e^{4x-5} dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{(e^{3x}-4)^2}{e^{4x}} dx$ (6) $\displaystyle\int (2\sin 3x + 5\cos 2x) dx$

(7) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$ (8) $\displaystyle\int \sin^4 x dx$

(9) $\displaystyle\int \cos 4x \cos x dx$ (10) $\displaystyle\int \sin 6x \sin 3x dx$

(11) $\displaystyle\int (2\sin 6x - 3\cos 2x)^2 dx$ (12) $\displaystyle\int (2\cos 7x - 5\sin 3x)^2 dx$

ヒント
(7) 2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ から得られる

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

を用いる．

(8) $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ であることと，2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ から得られる

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

を用い，さらに ① も用いる．

(9) 積和の公式を用いる．積和の公式を覚えていない場合は，加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ③$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ④$$

を辺々加えて

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$$

と導けばよい．

(10) 積和の公式を用いる．積和の公式を覚えていない場合は，③ − ④ より

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

と導けばよい．

(11) 被積分関数を展開し，$\sin^2 6x$，$\cos^2 2x$ の部分はそれぞれ ②, ① を用い，$\sin 6x \cos 2x$ の部分は積和の公式を用いる．積和の公式を覚えていない場合は，加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots⑥$$

を辺々加えて

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

と導けばよい．

(12) 積和の公式を覚えていない場合は，⑤ $-$ ⑥ より

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

と導けばよい．

解答

(1) $\displaystyle\int\left(x^4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx=\frac{1}{5}x^5-2\log|x|-\frac{3}{x}$

※ $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}=-x^{-1}=-\frac{1}{x}$ （これは公式としたい）

(2)
$$\begin{aligned}\int\left(3-\frac{5}{x}\right)\left(4x^2-1-\frac{2}{x}\right)dx &= \int\left(12x^2-20x-3-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}\right)dx\\ &= 4x^3-10x^2-3x-\log|x|-\frac{10}{x}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int\frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2}dx &= \int\left(3x-7+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx\\ &= \frac{3}{2}x^2-7x+5\log|x|+\frac{1}{x}\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int e^{4x-5}dx=\frac{1}{4}e^{4x-5}$

(5)
$$\begin{aligned}\int\frac{(e^{3x}-4)^2}{e^{4x}}dx &= \int\frac{e^{6x}-8e^{3x}+16}{e^{4x}}dx\\ &= \int(e^{2x}-8e^{-x}+16e^{-4x})dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}+8e^{-x}-4e^{-4x}\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int(2\sin 3x+5\cos 2x)dx=-\frac{2}{3}\cos 3x+\frac{5}{2}\sin 2x$

(7) $\displaystyle\int\cos^2 x dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$

$$
\begin{aligned}
(8)\quad \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx \\
&= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx \\
&= \int \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\left\{x - \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(9)\quad \int \cos 4x \cos x dx &= \int \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 3x) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) \\
&= \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 3x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(10)\quad \int \sin 6x \sin 3x dx &= \int -\frac{1}{2}(\cos 9x - \cos 3x) dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\sin 9x - \frac{1}{3}\sin 3x\right) \\
&= -\frac{1}{18}\sin 9x + \frac{1}{6}\sin 3x
\end{aligned}
$$

$$
(11)\quad \int (2\sin 6x - 3\cos 2x)^2 dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int (4\sin^2 6x - 12\sin 6x \cos 2x + 9\cos^2 2x) dx \\
&= \int \left\{4 \cdot \frac{1-\cos 12x}{2} - 12 \cdot \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x) + 9 \cdot \frac{1+\cos 4x}{2}\right\} dx \\
&= 2\left(x - \frac{1}{12}\sin 12x\right) - 6\left(-\frac{1}{8}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 4x\right) + \frac{9}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) \\
&= \frac{13}{2}x - \frac{1}{6}\sin 12x + \frac{3}{4}\cos 8x + \frac{3}{2}\cos 4x + \frac{9}{8}\sin 4x
\end{aligned}
$$

(12) $\displaystyle\int(2\cos 7x-5\sin 3x)^2dx$

$$=\int(4\cos^2 7x-20\cos 7x\sin 3x+25\sin^2 3x)dx$$

$$=\int\left\{4\cdot\frac{1+\cos 14x}{2}-20\cdot\frac{1}{2}(\sin 10x-\sin 4x)+25\cdot\frac{1-\cos 6x}{2}\right\}dx$$

$$=2\left(x+\frac{1}{14}\sin 14x\right)-10\left(-\frac{1}{10}\cos 10x+\frac{1}{4}\cos 4x\right)+\frac{25}{2}\left(x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)$$

$$=\frac{29}{2}x+\frac{1}{7}\sin 14x+\cos 10x-\frac{5}{2}\cos 4x-\frac{25}{12}\sin 6x$$

**★プチ置換**

$f(x)$ を区間 $I$ で微分可能な関数とする．このとき，$I$ で

$$\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\left\{\frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1}\right\}'=f(x)^{\alpha}\cdot f'(x)\quad(\alpha\neq-1)$$

をみたすから，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$

分数のときは，まずは分母の微分を考える．そして，分母の微分が分子にあればプチ置換 (1) で計算．

(2) $\displaystyle\int f(x)^{\alpha}\cdot f'(x)dx=\frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1}\quad(\alpha\neq-1)$

ルートやべき乗があるときは，まずはルートやべき乗の中の微分を考える．そして，ルートやべき乗の中の微分が外にあればプチ置換 (2) で計算．

※ $\log x$ と $\dfrac{1}{x}$ があるときは，$\dfrac{1}{x}$ を $(\log x)'$ とみてプチ置換で計算するとよい．

**【例題】**

(1) $\displaystyle\int\frac{5x}{3x^2-1}dx=\frac{5}{6}\int\frac{6x}{3x^2-1}dx=\frac{5}{6}\log|3x^2-1|$

※「分数であるから，まずは分母の $3x^2-1$ を微分してみるかな．

$$(3x^2-1)'=6x$$

これは分子の $5x$ ではないけど，係数を修正すれば分子になるから，プチ置換 (1) だ」と考えて計算している．分数ならいつでもプチ置換 (1) が使えるとは限らないが，分数のときはプチ置換 (1) が使えるかどうかを試してみよう．

(2) $\displaystyle\int\tan 2x dx=\int\frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx=\frac{1}{-2}\int\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}dx=-\frac{1}{2}\log|\cos 2x|$

※「$\tan 2x$ は分数ではないけど，$\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ にすれば分数だ．そして，分母の微分は

$(\cos 2x)' = -2\sin 2x$ で，係数を修正すれば分子になるから，プチ置換 (1) だ」と考えて計算している．

(3) $\displaystyle\int \sin^6 x \cdot \cos x dx = \frac{1}{7}\sin^7 x$

※「$\sin^6 x = (\sin x)^6$ はべき乗で，中の微分は $(\sin x)' = \cos x$ で外にあるから，プチ置換 (2) だ」と考えて計算している．

(4)
$$\begin{aligned}\int \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-x+7}}dx &= -\int (x^2-x+7)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-1)dx \\ &= -2(x^2-x+7)^{\frac{1}{2}} \\ &= -2\sqrt{x^2-x+7}\end{aligned}$$

※「ルートがあって，ルートの中の微分は $(x^2-x+7)' = 2x-1$ で，係数を修正すれば外にあるから，プチ置換 (2) だ」と考えて計算している．

(5)
$$\begin{aligned}\int \sin^3 x &= \int \sin^2 x \sin x dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)\sin x dx \\ &= \int (\sin x - \cos^2 x \sin x)dx \\ &= \int \{\sin x + \cos^2 x \cdot (-\sin x)\}dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\end{aligned}$$

**【問題 2.2】**

次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{-\cos x}{3\sin x+2}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{4\sin 3x}{6\cos 3x-5}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log 2x}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}dx$

(7) $\displaystyle\int e^{2x}(e^{2x}-1)^2 dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^4}{x}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(\cos x+2)^3}dx$

(11) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$

(12) $\displaystyle\int x\sqrt{4x^2-3}\,dx$

(13) $\displaystyle\int x\sqrt{(1-x^2)^5}\,dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}dx$

(16) $\displaystyle\int \cos^5 x dx$

(17) $\displaystyle\int (2\sin^2 x + 5\sin^4 x)\cos^3 x dx$

(18) $\displaystyle\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(20) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$

解答

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+1}dx = \log|x^2+4x+1|$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\log(e^{2x}+1)$

(3) $\displaystyle\int \frac{-\cos x}{3\sin x+2}dx = \frac{-1}{3}\int \frac{3\cos x}{3\sin x+2}dx = -\frac{1}{3}\log|3\sin x+2|$

(4) $\displaystyle\int \frac{4\sin 3x}{6\cos 3x-5}dx = \frac{4}{-18}\int \frac{-18\sin 3x}{6\cos 3x-5}dx = -\frac{2}{9}\log|6\cos 3x-5|$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log 2x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log 2x}dx = \log|\log 2x|$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log|\sin x|$

(7) $\displaystyle\int e^{2x}(e^{2x}-1)^2 dx = \frac{1}{2}\int (e^{2x}-1)^2\cdot 2e^{2x}dx = \frac{1}{6}(e^{2x}-1)^3$

(8) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^4}{x}dx = \int (\log x)^4\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{5}(\log x)^5$

(9) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx = \int (\sin x)^{-5}\cdot\cos x dx = \frac{1}{-4}(\sin x)^{-4} = -\frac{1}{4\sin^4 x}$

(10) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(\cos x+2)^3}dx = -\int (\cos x+2)^{-3}\cdot(-\sin x)dx = -\frac{1}{-2}(\cos x+2)^{-2} = \frac{1}{2(\cos x+2)^2}$

(11) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+5)^{\frac{1}{2}}\cdot 2xdx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}$

(12) $\displaystyle\int x\sqrt{4x^2-3}\,dx = \frac{1}{8}\int (4x^2-3)^{\frac{1}{2}}\cdot 8xdx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(4x^2-3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12}\sqrt{(4x^2-3)^3}$

(13) $\displaystyle\int x\sqrt{(1-x^2)^5}\,dx = \frac{1}{-2}\int (1-x^2)^{\frac{5}{2}}\cdot(-2x)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}(1-x^2)^{\frac{7}{2}} = -\frac{1}{7}\sqrt{(1-x^2)^7}$

(14) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2xdx = \frac{1}{2}\cdot 2(x^2+3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+3}$

(15) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}dx = \frac{1}{-6}\int (1-3x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-6x)dx = -\frac{1}{6}\cdot 2(1-3x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{1-3x^2}$

(16)
$$\begin{aligned}\int \cos^5 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx \\ &= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx \\ &= \int (1-2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x dx \\ &= \int (\cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x + \sin^4 x \cdot \cos x)dx \\ &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x\end{aligned}$$

(17)
$$\begin{aligned}\int (2\sin^2 x + 5\sin^4 x)\cos^3 x dx &= \int (2\sin^2 x + 5\sin^4 x)(1-\sin^2 x)\cos x dx \\ &= \int (2\sin^2 x + 3\sin^4 x - 5\sin^6 x)\cos x dx \\ &= \int (2\sin^2 x \cdot \cos x + 3\sin^4 x \cdot \cos x - 5\sin^6 x \cdot \cos x)dx \\ &= \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{5}{7}\sin^7 x\end{aligned}$$

(18) $\displaystyle\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \arctan x + \log(1+x^2)$

(19)
$$\begin{aligned}\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx \\ &= \int \left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\right\}dx \\ &= \arcsin x + 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

(20)
$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx &= \int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx \\
&= \int \frac{\sin x}{(2-\cos x)(2+\cos x)}dx \\
&= \int \frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{2-\cos x}+\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)dx \\
&= \int \frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{2-\cos x}-\frac{-\sin x}{2+\cos x}\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\{\log(2-\cos x)-\log(2+\cos x)\} \\
&= \frac{1}{4}\log\frac{2-\cos x}{2+\cos x}
\end{aligned}
$$

**★部分積分**

$f(x), g(x)$ を区間 $I$ で微分可能な関数とする．このとき，$I$ で

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

をみたすから，次が成り立つ．

$$\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx = f(x)g(x)$$

よって，$f'(x)g(x)$ の原始関数が求められるときは，

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

により $f(x)g'(x)$ の原始関数が求められる．

$$
\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[r, dash] \arrow[dr] & g(x) \arrow[dl] \\
f'(x) & g'(x)
\end{tikzcd}
$$

☆部分積分のやり方

基本的に，被積分関数が積の形のときに用いる．

(1) 被積分関数を「左上」と「右下」に配置する．

まずはやってみる．うまくいかなければ逆配置．経験をつむと，配置の仕方がわかってくる．

・$x^{\bullet}$ は「左上」に置くとよさそう．(準正解)

・「右下」には，原始関数が（簡単に）求まるものしか置けない．(正解)　→ log は「左上」?

(2) 「左下」と「右上」を埋める．

(3) 矢印の通りに部分積分を実行する．

※特殊形

(1) 「右下」を 1 として部分積分する．

(2) 左辺と同じ積分が右辺にも現れた場合，最後は方程式を解くようにして求める．

※テクニック

「左下」をみてから「右上」を定数で修正する．

【例題】

(1) $\displaystyle\int xe^{5x}dx$

ステップ 1：被積分関数を「左上」と「右下」に配置する．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr] & \\ & e^{5x} \end{tikzcd}$$

←この矢印が左辺

ステップ 2：「左下」と「右上」を埋める．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash] & \frac{1}{5}e^{5x} \arrow[dl] \\ 1 & e^{5x} \end{tikzcd}$$

←この矢印が右辺
「横はかけるだけ」
「斜めはかけて積分」を引く

ステップ 3：矢印の通りに部分積分を実行する．

$$\begin{aligned} \int xe^{5x}dx &= \underbrace{\frac{1}{5}xe^{5x}}_{\text{横}} - \underbrace{\frac{1}{5}\int e^{5x}dx}_{\text{斜め}} \\ &= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \int x\sin 3x dx &= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx \\ &= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & -\frac{1}{3}\cos 3x \arrow[dl] \\ 1 & \sin 3x \end{tikzcd}$$

(3)
$$\begin{aligned} \int x^2\sin x dx &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx \\ &= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) \\ &= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} x^2 \arrow[r, dash] \arrow[dr] & -\cos x \arrow[dl] \\ 2x & \sin x \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & \sin x \arrow[dl] \\ 1 & \cos x \end{tikzcd}$$

※2 回部分積分をやらなければいけないこともある．

(4)
$$\begin{aligned} \int \log(x-3)dx &= (x-3)\log(x-3) - \int dx \\ &= (x-3)\log(x-3) - x \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \log(x-3) \arrow[r, dash] \arrow[dr] & x-3 \arrow[dl] \\ \frac{1}{x-3} & 1 \end{tikzcd}$$

※特殊形 (1)：「右下」を 1 として部分積分する．
テクニック：「左下」の形を見て,「右上」を定数で修正する．

(5)
$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\ &= -e^x \cos x + \left( e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_{\text{移項}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} e^x & -\cos x \\ e^x & \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{cc} e^x & \sin x \\ e^x & \cos x \end{array}$$

であるから

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

よって

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right)$$

※特殊形 (2)：左辺と同じ積分が右辺にも現れるときがある．

**【問題 2.3】**
次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^{4x}dx$

(2) $\displaystyle\int xe^{\frac{x}{3}}dx$

(3) $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$

(4) $\displaystyle\int x\cos 2x dx$

(5) $\displaystyle\int x^2 \cos x dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{\log 4x}{x^2}dx$

(7) $\displaystyle\int x^2 \log x dx$

(8) $\displaystyle\int (\log x)^2 dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

(10) $\displaystyle\int \arctan x dx$

(11) $\displaystyle\int \arcsin x dx$

(12) $\displaystyle\int 2x \arctan x dx$

(13) $\displaystyle\int 2x(\arctan x)^2 dx$

(14) $\displaystyle\int (3x - \sin x)^2 dx$

(15) $\displaystyle\int e^{2x}\cos x dx$

(16) $\displaystyle\int e^{-3x}\sin 2x dx$

解答

(1)
$$\begin{aligned}\int xe^{4x}dx &= \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x}dx \\ &= \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} x & \frac{1}{4}e^{4x} \\ 1 & e^{4x} \end{array}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int xe^{\frac{x}{3}}dx &= 3xe^{\frac{x}{3}} - 3\int e^{\frac{x}{3}}dx \\ &= 3xe^{\frac{x}{3}} - 9e^{\frac{x}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} x & 3e^{\frac{x}{3}} \\ 1 & e^{\frac{x}{3}} \end{array}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}dx &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx \\ &= -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) \\ &= -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} x^2 & -e^{-x} \\ 2x & e^{-x} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x & -e^{-x} \\ 1 & e^{-x} \end{array}$$

(4)
$$\begin{aligned}\int x\cos 2x dx &= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} x & \frac{1}{2}\sin 2x \\ 1 & \cos 2x \end{array}$$

(5)
$$\begin{aligned}\int x^2\cos x dx &= x^2\sin x - 2\int x\sin x dx \\ &= x^2\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right) \\ &= x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) \\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} x^2 & \sin x \\ 2x & \cos x \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x & -\cos x \\ 1 & \sin x \end{array}$$

(6)
$$\begin{aligned}\int \frac{\log 4x}{x^2}dx &= -\frac{\log 4x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx \\ &= -\frac{\log 4x}{x} - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \log 4x & -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{array}$$

(7)
$$\begin{aligned}\int x^2\log x dx &= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \log x & \frac{1}{3}x^3 \\ \frac{1}{x} & x^2 \end{array}$$

(8)
$$
\begin{aligned}
\int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - 2\int \log x dx \\
&= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int dx\right) \\
&= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) \\
&= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\log x)^2 \arrow[r, dash] \arrow[dr] & x \arrow[dl] \\
2\log x \cdot \dfrac{1}{x} & 1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\log x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & x \arrow[dl] \\
\dfrac{1}{x} & 1
\end{tikzcd}
$$

(9)
$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= x\tan x - \int \tan x dx \\
&= x\tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\
&= x\tan x + \log|\cos x|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & \tan x \arrow[dl] \\
1 & \dfrac{1}{\cos^2 x}
\end{tikzcd}
$$

(10)
$$
\begin{aligned}
\int \arctan x dx &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\arctan x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & x \arrow[dl] \\
\dfrac{1}{1+x^2} & 1
\end{tikzcd}
$$

(11)
$$
\begin{aligned}
\int \arcsin x dx &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) dx \\
&= x\arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\arcsin x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & x \arrow[dl] \\
\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 1
\end{tikzcd}
$$

(12)
$$
\begin{aligned}
\int 2x\arctan x dx &= (x^2+1)\arctan x - \int dx \\
&= (x^2+1)\arctan x - x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\arctan x \arrow[r, dash] \arrow[dr] & x^2+1 \arrow[dl] \\
\dfrac{1}{1+x^2} & 2x
\end{tikzcd}
$$

(13) $\displaystyle\int 2x(\arctan x)^2 dx$

$$\begin{array}{rcl} (\arctan x)^2 & & x^2+1 \\ 2\arctan x \cdot \dfrac{1}{1+x^2} & & 2x \end{array}$$

$$= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2\int \arctan x dx$$

$$= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2\left\{x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right\}$$

$$= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2x \arctan x + \log(1+x^2)$$

(14) $\displaystyle\int (3x - \sin x)^2 dx$

$$\begin{array}{rcl} x & & -\cos x \\ 1 & & \sin x \end{array}$$

$$= \int (9x^2 - 6x \sin x + \sin^2 x) dx$$

$$= 3x^3 - 6\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right) + \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$$

$$= 3x^3 - 6(-x\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

$$= 3x^3 + \frac{1}{2}x + 6x\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x - 6\sin x$$

(15) $\displaystyle\int e^{2x}\cos x dx$

$$\begin{array}{rcl} e^{2x} & & \sin x \\ 2e^{2x} & & \cos x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} e^{2x} & & -\cos x \\ 2e^{2x} & & \sin x \end{array}$$

$$= e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x dx$$

$$= e^{2x}\sin x - 2\left(-e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x dx\right)$$

$$= e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - \underbrace{4\int e^{2x}\cos x dx}_{\text{移項}}$$

であるから

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x$$

よって

$$\begin{aligned} \int e^{2x}\cos x dx &= \frac{1}{5}\left(e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right) \\ &= \frac{1}{5}e^{2x}\sin x + \frac{2}{5}e^{2x}\cos x \end{aligned}$$

(16) $\displaystyle\int e^{-3x}\sin 2x dx$

$$\begin{array}{ccc} e^{-3x} & & -\frac{1}{2}\cos 2x \\ -3e^{-3x} & & \sin 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} e^{-3x} & & \frac{1}{2}\sin 2x \\ -3e^{-3x} & & \cos 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{2}\int e^{-3x}\cos 2x dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x + \frac{3}{2}\int e^{-3x}\sin 2x dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{4}e^{-3x}\sin 2x - \underbrace{\frac{9}{4}\int e^{-3x}\sin 2x dx}_{\text{移項}}
\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{13}{4}\int e^{-3x}\sin 2x dx = -\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{4}e^{-3x}\sin 2x$$

よって

$$\begin{aligned}
\int e^{-3x}\sin 2x dx &= \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{4}e^{-3x}\sin 2x\right) \\
&= -\frac{2}{13}e^{-3x}\cos 2x - \frac{3}{13}e^{-3x}\sin 2x
\end{aligned}$$

**★有理関数の積分**

分母を実数の範囲で因数分解し，その形から部分分数に分解してそれぞれを積分する．

$$\int \frac{1}{a^2+(x+b)^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x+b}{a} \quad (a \neq 0)$$

は公式としてよい（左辺において $x+b=at$ と置換するか，右辺を微分することにより示せる）．

【例題】

$\displaystyle\int \frac{x^2-7x-1}{(x-2)(x^2+2x+3)}dx$ を求めよ．

解答

$$\frac{x^2-7x-1}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$x^2-7x-1 = A(x^2+2x+3)+(Bx+C)(x-2) \quad \cdots (*)$

$x=2$ を代入　$-11 = 11A \quad \therefore \quad A=-1$

$x=0$ を代入　$-1 = 3A-2C$

$-1 = -3-2C \quad \therefore \quad C=-1$

$x=1$ を代入　$-7 = 6A-(B+C)$

$-7 = -6-B+1 \quad \therefore \quad B=2$

よって，プチ置換 (1) と上の公式を用いると

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-7x-1}{(x-2)(x^2+2x+3)}dx &= \int \left(-\frac{1}{x-2}+\frac{2x-1}{x^2+2x+3}\right)dx \\
&= \int \left\{-\frac{1}{x-2}+\frac{(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\right\}dx \\
&= \int \left\{-\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{3}{(\sqrt{2})^2+(x+1)^2}\right\}dx \\
&= -\log|x-2|+\log(x^2+2x+3)-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

※ $A, B, C$ を求めるとき，$(*)$ の右辺を展開して

$x^2-7x-1=(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+(3A-2C)$

としてから係数比較して，連立方程式

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B+C=-7 \\ 3A-2C=-1 \end{cases}$$

を解いてもよい．

**【問題 2.4】**
次を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{14x+18}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x-1)}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{5x^2-2x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2-x-11}{(x-3)(x^2-2x+2)}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{-10x^2+5x+48}{(x-2)(x-3)(x^2+4x+6)}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{7x^2+12x+65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}dx$

ヒント
分解の形は次のようになる．

(1) $\displaystyle\frac{14x+18}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}$

(2) $\displaystyle\frac{1}{x^3(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}$

(3) $\displaystyle\frac{5x^2-2x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

(4) $\displaystyle\frac{x^2-x-11}{(x-3)(x^2-2x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$

(5) $\dfrac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+2}$

(6) $\dfrac{-10x^2+5x+48}{(x-2)(x-3)(x^2+4x+6)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4x+6}$

(7) $\dfrac{7x^2+12x+65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$

(8) $\dfrac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-2x+5}$

解答

(1) $\dfrac{14x+18}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-3}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$14x+18=A(x+2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x+2)$

$x=-1$ を代入 $\quad 4=-4A \quad \therefore \quad A=-1$

$x=-2$ を代入 $\quad -10=5B \quad \therefore \quad B=-2$

$x=3$ を代入 $\quad 60=20C \quad \therefore \quad C=3$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{14x+18}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx &= \int\left(-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-3}\right)dx\\ &= -\log|x+1|-2\log|x+2|+3\log|x-3|\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{1}{x^3(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{x-1}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$1=Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)+Dx^3$

$x=0$ を代入 $\quad 1=-C \quad \therefore \quad C=-1$

$x=1$ を代入 $\quad 1=D$

$x=-1$ を代入 $\quad 1=-2A+2B-2C-D$

$\quad 1=-2A+2B+2-1 \quad \therefore \quad A=B$

$x=2$ を代入 $\quad 1=4A+2B+C+8D$

$\quad 1=4A+2A-1+8 \quad \therefore \quad A=-1,\ B=-1$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^3(x-1)}dx &= \int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x-1}\right)dx\\ &= -\log|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\log|x-1|\end{aligned}$$

※$C, D$ を求めた後，次のように $A, B$ を求めてもよい．

$x^3$ の係数比較　　$0 = A + D \qquad \therefore \quad A = -D = -1$

$x$ の係数比較　　$0 = -B + C \qquad \therefore \quad B = C = -1$

数値代入だけでなく，係数比較も用いるなどして，臨機応変に求めるとよい．

(3) $\dfrac{5x^2 - 2x + 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$5x^2 - 2x + 2 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$

$x = -1$ を代入　　$9 = 3A \qquad \therefore \quad A = 3$

$x = 0$ を代入　　$2 = A + C$

$2 = 3 + C \qquad \therefore \quad C = -1$

$x = 1$ を代入　　$5 = A + 2(B + C)$

$5 = 3 + 2B - 2 \qquad \therefore \quad B = 2$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x^2 - 2x + 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} dx &= \int \left( \frac{3}{x+1} + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \right) dx \\
&= 3 \log |x + 1| + \log(x^2 - x + 1)
\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{x^2 - x - 11}{(x-3)(x^2 - 2x + 2)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$x = 3$ を代入　　$-5 = 5A \qquad \therefore \quad A = -1$

$x = 0$ を代入　　$-11 = 2A - 3C$

$-11 = -2 - 3C \qquad \therefore \quad C = 3$

$x = 1$ を代入　　$-11 = A - 2(B + C)$

$-11 = -1 - 2B - 6 \qquad \therefore \quad B = 2$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - x - 11}{(x-3)(x^2 - 2x + 2)} dx &= \int \left( -\frac{1}{x-3} + \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 2} \right) dx \\
&= \int \left\{ -\frac{1}{x-3} + \frac{(2x - 2) + 5}{x^2 - 2x + 2} \right\} dx \\
&= \int \left\{ -\frac{1}{x-3} + \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{5}{1 + (x-1)^2} \right\} dx \\
&= -\log |x - 3| + \log(x^2 - 2x + 2) + 5 \arctan(x - 1)
\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$x^2+x+3=A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x+1)$

$x=-1$ を代入　　$3=A$

$x=0$ を代入　　$3=2A+C$

$3=6+C \qquad \therefore \quad C=-3$

$x=1$ を代入　　$5=5A+2(B+C)$

$5=15+2B-6 \qquad \therefore \quad B=-2$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx &= \int \left(\frac{3}{x+1}+\frac{-2x-3}{x^2+2x+2}\right)dx \\ &= \int \left\{\frac{3}{x+1}+\frac{-(2x+2)-1}{x^2+2x+2}\right\}dx \\ &= \int \left\{\frac{3}{x+1}-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{1+(x+1)^2}\right\}dx \\ &= 3\log|x+1|-\log(x^2+2x+2)-\arctan(x+1)\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{-10x^2+5x+48}{(x-2)(x-3)(x^2+4x+6)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4x+6}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-10x^2+5x+48=A(x-3)(x^2+4x+6)+B(x-2)(x^2+4x+6)+(Cx+D)(x-2)(x-3)$

$x=2$ を代入　　$18=-18A \qquad \therefore \quad A=-1$

$x=3$ を代入　　$-27=27B \qquad \therefore \quad B=-1$

$x=0$ を代入　　$48=-18A-12B+6D$

$8=-3A-2B+D$

$8=3+2+D \qquad \therefore \quad D=3$

$x=1$ を代入　　$43=-22A-11B+2(C+D)$

$43=22+11+2C+6 \qquad \therefore \quad C=2$

よって

$$\begin{aligned}&\int \frac{-10x^2+5x+48}{(x-2)(x-3)(x^2+4x+6)}dx \\ &= \int \left(-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{2x+3}{x^2+4x+6}\right)dx \\ &= \int \left\{-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{(2x+4)-1}{x^2+4x+6}\right\}dx \\ &= \int \left\{-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{2x+4}{x^2+4x+6}-\frac{1}{(\sqrt{2}\,)^2+(x+2)^2}\right\}dx \\ &= -\log|x-2|-\log|x-3|+\log(x^2+4x+6)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(7) $\dfrac{7x^2+12x+65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$7x^2+12x+65=A(x-2)(x^2+2x+5)+B(x+1)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x+1)(x-2)$

$x=-1$ を代入　　$60=-12A \quad \therefore \quad A=-5$

$x=2$ を代入　　$117=39B \quad \therefore \quad B=3$

$x=0$ を代入　　$65=-10A+5B-2D$

$65=50+15-2D \quad \therefore \quad D=0$

$x=1$ を代入　　$84=-8A+16B-2(C+D)$

$42=-4A+8B-(C+D)$

$42=20+24-C \quad \therefore \quad C=2$

よって

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{7x^2+12x+65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)}dx \\
&=\int\left(-\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{2x}{x^2+2x+5}\right)dx \\
&=\int\left(-\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+5}\right)dx \\
&=\int\left\{-\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{2x+2}{x^2+2x+5}-\frac{2}{2^2+(x+1)^2}\right\}dx \\
&=-5\log|x+1|+3\log|x-2|+\log(x^2+2x+5)-\arctan\frac{x+1}{2}
\end{aligned}
$$

(8) $\dfrac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-2x+5}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$8x^2-16x+15=Ax(x^2-2x+5)+B(x^2-2x+5)+(Cx+D)x^2$

$8x^2-16x+15=(A+C)x^3+(-2A+B+D)x^2+(5A-2B)x+5B$

係数比較して

$$
\begin{cases}
A+C=0 & \cdots ① \\
-2A+B+D=8 & \cdots ② \\
5A-2B=-16 & \cdots ③ \\
5B=15 & \cdots ④
\end{cases}
$$

④, ③, ①, ② の順で解けば $B=3,\ A=-2,\ C=2,\ D=1$

よって

$$\int \frac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}dx$$
$$= \int \left( -\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2-2x+5} \right) dx$$
$$= \int \left\{ -\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{(2x-2)+3}{x^2-2x+5} \right\} dx$$
$$= \int \left\{ -\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2x-2}{x^2-2x+5} + \frac{3}{2^2+(x-1)^2} \right\} dx$$
$$= -2\log|x| - \frac{3}{x} + \log(x^2-2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x-1}{2}$$

**★三角関数の有理形**

三角関数の有理形の積分は，$t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置換する．このとき

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

を用いる．つまり，与えられた $x$ の積分を

$$\cos x \longrightarrow \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x \longrightarrow \frac{2t}{1+t^2}, \qquad dx \longrightarrow \frac{2}{1+t^2}dt$$

とおきかえて，$t$ の積分に変えて計算する．

【例題】

$\displaystyle\int \frac{\sin x + 3\cos x + 3}{\sin x(\sin x + \cos x + 1)}dx$ を求めよ．

解答

$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x + 3\cos x + 3}{\sin x(\sin x + \cos x + 1)}dx &= \int \frac{\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 3}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{t+3}{t(t+1)}dt \\
&= \int \left(\frac{3}{t} - \frac{2}{t+1}\right)dt \\
&= 3\log|t| - 2\log|t+1| \\
&= 3\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| - 2\log\left|\tan\frac{x}{2} + 1\right|
\end{aligned}$$

※ $\dfrac{t+3}{t(t+1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t+1}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$t+3=A(t+1)+Bt$

$t=0,-1$ を代入すれば，順に $A=3,\ B=-2$ が求まる．

【問題 2.5】
$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくことにより，次の積分を求めよ．答えは，$t$ についての積分を実行したところまででよいことにする（$x$ の式にもどさなくてもよいことにする）．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{4+5\cos x}dx$　　(4) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{1}{3\sin x+4\cos x+5}dx$　　(6) $\displaystyle\int\frac{1}{5\cos x+12\sin x+13}dx$

(7) $\displaystyle\int\frac{1}{2+\cos x}dx$　　(8) $\displaystyle\int\frac{1}{2+\sin x}dx$

(9) $\displaystyle\int\frac{5}{3\sin x+4\cos x}dx$　　(10) $\displaystyle\int\frac{3+\sin x}{\cos x(2+\cos x)}dx$

解答
(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|$

(2)
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos x}dx &= \int\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt\\ &= \int\frac{2}{1-t^2}dt\\ &= \int\frac{-2}{(t+1)(t-1)}dt\\ &= \int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt\\ &= \log|t+1|-\log|t-1|\end{aligned}$$

※ $\dfrac{-2}{(t+1)(t-1)}=\dfrac{A}{t+1}+\dfrac{B}{t-1}$
と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-2=A(t-1)+B(t+1)$

$t=-1,1$ を代入すれば，順に $A=1,\ B=-1$ が求まる．

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \int \frac{1}{4+5\cos x}dx &= \int \frac{1}{4+5\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{9-t^2}dt \\
&= \int \frac{-2}{(t+3)(t-3)}dt \\
&= \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t-3}\right)dt \\
&= \frac{1}{3}\left(\log|t+3|-\log|t-3|\right)
\end{aligned}
$$

※ $\dfrac{-2}{(t+3)(t-3)} = \dfrac{A}{t+3}+\dfrac{B}{t-3}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-2 = A(t-3)+B(t+3)$

$t=-3,3$ を代入すれば，順に $A=\dfrac{1}{3}$，$B=-\dfrac{1}{3}$ が求まる．

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \int \frac{1}{1+\sin x}dx &= \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2+2t+1}dt \\
&= \int \frac{2}{(t+1)^2}dt \\
&= -\frac{2}{t+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5)\quad \int \frac{1}{3\sin x+4\cos x+5}dx &= \int \frac{1}{3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+4\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2+6t+9}dt \\
&= \int \frac{2}{(t+3)^2}dt \\
&= -\frac{2}{t+3}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(6)\quad \int \frac{1}{5\cos x+12\sin x+13}dx &= \int \frac{1}{5\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+12\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+13}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{1}{4t^2+12t+9}dt \\ &= \int \frac{1}{(2t+3)^2}dt \\ &= -\frac{1}{2(2t+3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(7)\quad \int \frac{1}{2+\cos x}dx &= \int \frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{2}{t^2+3}dt \\ &= \int \frac{2}{(\sqrt{3})^2+t^2}dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8)\quad \int \frac{1}{2+\sin x}dx &= \int \frac{1}{2+\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{1}{t^2+t+1}dt \\ &= \int \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2}dt \\ &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{t+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$(9)\quad \int \frac{5}{3\sin x + 4\cos x}dx = \int \frac{5}{3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+4\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{-5}{2t^2-3t-2}dt$$
$$= \int \frac{-5}{(2t+1)(t-2)}dt$$
$$= \int \left(\frac{2}{2t+1}-\frac{1}{t-2}\right)dt$$
$$= \log|2t+1| - \log|t-2|$$

※ $\dfrac{-5}{(2t+1)(t-2)} = \dfrac{A}{2t+1} + \dfrac{B}{t-2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-5 = A(t-2) + B(2t+1)$

$t = -\dfrac{1}{2}$, 2 を代入すれば，順に $A = 2,\ B = -1$ が求まる．

$$(10)\quad \int \frac{3+\sin x}{\cos x(2+\cos x)}dx = \int \frac{3+\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\left(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{3(1+t^2)+2t}{2(1+t^2)+(1-t^2)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{3t^2+2t+3}{t^2+3}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= \int \frac{6t^2+4t+6}{(1-t^2)(t^2+3)}dt$$
$$= \int \frac{-6t^2-4t-6}{(t+1)(t-1)(t^2+3)}dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{t+1}-\frac{2}{t-1}+\frac{t-3}{t^2+3}\right)dt$$
$$= \int \left\{\frac{1}{t+1}-\frac{2}{t-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+3}-\frac{3}{(\sqrt{3})^2+t^2}\right\}dt$$
$$= \log|t+1| - 2\log|t-1| + \frac{1}{2}\log(t^2+3) - \sqrt{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}$$

※ $\dfrac{-6t^2-4t-6}{(t+1)(t-1)(t^2+3)} = \dfrac{A}{t+1} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{Ct+D}{t^2+3}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$-6t^2-4t-6 = A(t-1)(t^2+3) + B(t+1)(t^2+3) + (Ct+D)(t+1)(t-1)$

$t=-1$ を代入　　$-8=-8A$　　$\therefore\quad A=1$

$t=1$ を代入　　$-16=8B$　　$\therefore\quad B=-2$

$t=0$ を代入　　$-6=-3A+3B-D$

$-6=-3-6-D$　　$\therefore\quad D=-3$

$t=2$ を代入　　$-38=7A+21B+3(2C+D)$

$-38=7-42+6C-9$　　$\therefore\quad C=1$

★根号を含む有理形

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a>0)$ を含む有理形の積分は

$$\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x=t$$

と置換する．このとき

$$x,\quad \frac{dx}{dt},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}$$

を $t$ で表し，これらを用いる．

【例題】

$\displaystyle\int\frac{7}{(8x+3)\sqrt{x^2+x+1}}dx$ を求めよ．

解答

$\sqrt{x^2+x+1}+x=t$ とおくと $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$ $\cdots$①

① の両辺を 2 乗すると

$$x^2+x+1=t^2-2tx+x^2$$

$$(2t+1)x=t^2-1\qquad\therefore\quad x=\frac{t^2-1}{2t+1}\ \cdots②$$

また，② を微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot(2t+1)-(t^2-1)\cdot 2}{(2t+1)^2}=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}\ \cdots③$$

さらに，② を ① へ代入すると

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x=t-\frac{t^2-1}{2t+1}=\frac{t^2+t+1}{2t+1}\ \cdots④$$

よって，②,③,④ より

$$\int\frac{7}{(8x+3)\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$=\int\frac{7}{\left(8\cdot\frac{t^2-1}{2t+1}+3\right)\frac{t^2+t+1}{2t+1}}\cdot\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt$$

$$=\int\frac{7(2t+1)}{8(t^2-1)+3(2t+1)}\cdot\frac{2}{2t+1}dt$$

$$= \int \frac{14}{8t^2+6t-5}dt$$
$$= \int \frac{14}{(2t-1)(4t+5)}dt$$
$$= \int \left(\frac{2}{2t-1} - \frac{4}{4t+5}\right)dt$$
$$= \log|2t-1| - \log|4t+5|$$
$$= \log\left|2\sqrt{x^2+x+1}+2x-1\right| - \log\left|4\sqrt{x^2+x+1}+4x+5\right|$$

**【問題 2.6】**

次の積分を，カッコ内の置換により求めよ．答えは，$t$ についての積分を実行したところまででよいことにする（$x$ の式にもどさなくてもよいことにする）．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx \quad \left(\sqrt{x^2+2x+3}+x=t\right)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx \quad \left(\sqrt{x^2+3x+1}+x=t\right)$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx \quad \left(\sqrt{x^2+1}+x=t\right)$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x-9}}dx \quad \left(\sqrt{x^2-x-9}+x=t\right)$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-5x-1}}dx \quad \left(\sqrt{x^2-5x-1}+x=t\right)$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}dx \quad \left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x=t\right)$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2+5x+4}}dx \quad \left(\sqrt{2x^2+5x+4}+\sqrt{2}x=t\right)$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}dx \quad \left(\sqrt{x^2+1}+x=t\right)$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx \quad \left(\sqrt{x^2+x+1}+x=t\right)$

(10) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}dx \quad \left(\sqrt{x^2+x+1}+x=t\right)$

解答

(1) $\sqrt{x^2+2x+3} = t-x$ の両辺を 2 乗すると

$$x^2+2x+3 = t^2-2tx+x^2$$

$$2(t+1)x = t^2-3 \qquad \therefore \quad x = \frac{t^2-3}{2(t+1)}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t\cdot(t+1)-(t^2-3)\cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2}$$

さらに

$$\sqrt{x^2+2x+3}=t-x=t-\frac{t^2-3}{2(t+1)}=\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)}$$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx &= \int\frac{1}{\dfrac{t^2+2t+3}{2(t+1)}}\cdot\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2}dt\\ &= \int\frac{1}{t+1}dt\\ &= \log|t+1|\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x^2+3x+1}=t-x$ の両辺を 2 乗すると

$x^2+3x+1=t^2-2tx+x^2$

$(2t+3)x=t^2-1 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{t^2-1}{2t+3}$

また

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot(2t+3)-(t^2-1)\cdot 2}{(2t+3)^2}=\frac{2(t^2+3t+1)}{(2t+3)^2}$$

さらに

$$\sqrt{x^2+3x+1}=t-x=t-\frac{t^2-1}{2t+3}=\frac{t^2+3t+1}{2t+3}$$

よって

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx &= \int\frac{1}{\dfrac{t^2+3t+1}{2t+3}}\cdot\frac{2(t^2+3t+1)}{(2t+3)^2}dt\\ &= \int\frac{2}{2t+3}dt\\ &= \log|2t+3|\end{aligned}$$

(3) $\sqrt{x^2+1}=t-x$ の両辺を 2 乗すると

$x^2+1=t^2-2tx+x^2$

$2tx=t^2-1 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{t^2-1}{2t} \ \left(=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\right)$

また

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)=\frac{t^2+1}{2t^2}$$

さらに

$$\sqrt{x^2+1}=t-x=t-\frac{t^2-1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{1}{\dfrac{t^2-1}{2t}\cdot\dfrac{t^2+1}{2t}}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2-1}dt \\
&= \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \log|t-1|-\log|t+1|
\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{x^2-x-9}=t-x$ の両辺を 2 乗すると

$x^2-x-9=t^2-2tx+x^2$

$(2t-1)x=t^2+9 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{t^2+9}{2t-1}$

また

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t\cdot(2t-1)-(t^2+9)\cdot 2}{(2t-1)^2}=\dfrac{2(t^2-t-9)}{(2t-1)^2}$

さらに

$\sqrt{x^2-x-9}=t-x=t-\dfrac{t^2+9}{2t-1}=\dfrac{t^2-t-9}{2t-1}$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x-9}}dx &= \int \frac{1}{\dfrac{t^2+9}{2t-1}\cdot\dfrac{t^2-t-9}{2t-1}}\cdot\frac{2(t^2-t-9)}{(2t-1)^2}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2+9}dt \\
&= \int \frac{2}{3^2+t^2}dt \\
&= \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}
\end{aligned}$$

(5) $\sqrt{x^2-5x-1}=t-x$ の両辺を 2 乗すると

$x^2-5x-1=t^2-2tx+x^2$

$(2t-5)x=t^2+1 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{t^2+1}{2t-5}$

また

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t\cdot(2t-5)-(t^2+1)\cdot 2}{(2t-5)^2}=\dfrac{2(t^2-5t-1)}{(2t-5)^2}$

さらに

$\sqrt{x^2-5x-1} = t - x = t - \dfrac{t^2+1}{2t-5} = \dfrac{t^2-5t-1}{2t-5}$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-5x-1}}dx &= \int \frac{1}{\left(\dfrac{t^2+1}{2t-5}-2\right)\dfrac{t^2-5t-1}{2t-5}} \cdot \frac{2(t^2-5t-1)}{(2t-5)^2}dt \\
&= \int \frac{2t-5}{(t^2+1)-2(2t-5)} \cdot \frac{2}{2t-5}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2-4t+11}dt \\
&= \int \frac{2}{(\sqrt{7})^2+(t-2)^2}dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{t-2}{\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

(6) $\sqrt{4x^2+x+1} = t - 2x$ の両辺を 2 乗すると

$4x^2+x+1 = t^2-4tx+4x^2$

$(4t+1)x = t^2-1 \qquad \therefore \quad x = \dfrac{t^2-1}{4t+1}$

また

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t\cdot(4t+1)-(t^2-1)\cdot 4}{(4t+1)^2} = \dfrac{2(2t^2+t+2)}{(4t+1)^2}$

さらに

$\sqrt{4x^2+x+1} = t-2x = t - 2\cdot\dfrac{t^2-1}{4t+1} = \dfrac{2t^2+t+2}{4t+1}$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}dx &= \int \frac{1}{\left(\dfrac{t^2-1}{4t+1}+1\right)\dfrac{2t^2+t+2}{4t+1}} \cdot \frac{2(2t^2+t+2)}{(4t+1)^2}dt \\
&= \int \frac{4t+1}{(t^2-1)+(4t+1)} \cdot \frac{2}{4t+1}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2+4t}dt \\
&= \int \frac{2}{t(t+4)}dt \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+4}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\big(\log|t| - \log|t+4|\big)
\end{aligned}$$

(7) $\sqrt{2x^2+5x+4} = t - \sqrt{2}\,x$ の両辺を 2 乗すると

$2x^2+5x+4=t^2-2\sqrt{2}\,tx+2x^2$

$(2\sqrt{2}\,t+5)x=t^2-4 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{t^2-4}{2\sqrt{2}\,t+5}$

また

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t\cdot(2\sqrt{2}\,t+5)-(t^2-4)\cdot 2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2}\,t+5)^2}=\frac{2(\sqrt{2}\,t^2+5t+4\sqrt{2}\,)}{(2\sqrt{2}\,t+5)^2}$$

さらに

$$\sqrt{2x^2+5x+4}=t-\sqrt{2}\,x=t-\frac{\sqrt{2}\,(t^2-4)}{2\sqrt{2}\,t+5}=\frac{\sqrt{2}\,t^2+5t+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\,t+5}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{x\sqrt{2x^2+5x+4}}dx &= \int\frac{1}{\dfrac{t^2-4}{2\sqrt{2}\,t+5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\,t^2+5t+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\,t+5}}\cdot\frac{2(\sqrt{2}\,t^2+5t+4\sqrt{2}\,)}{(2\sqrt{2}\,t+5)^2}dt \\
&= \int\frac{2}{t^2-4}dt \\
&= \int\frac{2}{(t-2)(t+2)}dt \\
&= \int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\big(\log|t-2|-\log|t+2|\big)
\end{aligned}$$

(8) (3) で導いた

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t^2+1}{2t^2},\ \sqrt{x^2+1}=\frac{t^2+1}{2t}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}dx &= \int\frac{1}{\dfrac{t^2+1}{2t}-1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt \\
&= \int\frac{2t}{(t^2+1)-2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt \\
&= \int\frac{t^2+1}{t(t-1)^2}dt \\
&= \int\left\{\frac{1}{t}+\frac{2}{(t-1)^2}\right\}dt \\
&= \log|t|-\frac{2}{t-1}
\end{aligned}$$

※ $\dfrac{t^2+1}{t(t-1)^2}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t-1}+\dfrac{C}{(t-1)^2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$t^2+1=A(t-1)^2+Bt(t-1)+Ct$

$t=0$ を代入　　　$1=A$

$t=1$ を代入　　　$2=C$

$t=-1$ を代入　　$2=4A+2B-C$

$$2=4+2B-2 \qquad \therefore \quad B=0$$

(9) 例題で導いた

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx &= \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt \\
&= \int \frac{2(t^2+t+1)}{t(2t+1)^2}dt \\
&= \int \left\{\frac{2}{t}-\frac{3}{2t+1}-\frac{3}{(2t+1)^2}\right\}dt \\
&= 2\log|t|-\frac{3}{2}\log|2t+1|+\frac{3}{2(2t+1)}
\end{aligned}$$

※ $\dfrac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{2t+1}+\dfrac{C}{(2t+1)^2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$2(t^2+t+1)=A(2t+1)^2+Bt(2t+1)+Ct$

$t=0$ を代入　　　$2=A$

$t=-\dfrac{1}{2}$ を代入　　$\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}C \qquad \therefore \quad C=-3$

$t=1$ を代入　　　$6=9A+3B+C$

$$6=18+3B-3 \qquad \therefore \quad B=-3$$

(10) 例題で導いた

$$x=\frac{t^2-1}{2t+1},\ \frac{dx}{dt}=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2},\ \sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2+t+1}{2t+1}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}dx &= \int \frac{2}{\left(\dfrac{t^2-1}{2t+1}\right)^2 \dfrac{t^2+t+1}{2t+1}} \cdot \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt \\
&= \int \frac{8t+4}{(t^2-1)^2}dt \\
&= \int \frac{8t+4}{(t-1)^2(t+1)^2}dt \\
&= \int \left\{ -\frac{1}{t-1} + \frac{3}{(t-1)^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right\} dt \\
&= -\log|t-1| - \frac{3}{t-1} + \log|t+1| + \frac{1}{t+1}
\end{aligned}$$

※ $\dfrac{8t+4}{(t-1)^2(t+1)^2} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{(t-1)^2} + \dfrac{C}{t+1} + \dfrac{D}{(t+1)^2}$

と分解の形を決めてから分母をはらうと

$8t+4 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t-1)^2(t+1) + D(t-1)^2$

$t=1$ を代入　　$12 = 4B \quad \therefore \quad B = 3$

$t=-1$ を代入　　$-4 = 4D \quad \therefore \quad D = -1$

$t=0$ を代入　　$4 = -A+B+C+D$

$4 = -A+3+C-1 \quad \therefore \quad C = A+2$

$t^3$ の係数比較　　$0 = A+C$

$0 = A+(A+2) \quad \therefore \quad A=-1,\ C=1$

**★定積分**

連続関数 $f(x)$ の原始関数のひとつを $F(x)$ とするとき，定積分は

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

で計算する（積分してから数値の代入）.

**【問題 2.7】**

次を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^2-2x+3)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 (3x^2-6x+1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 (2x^2+x-6)dx$

(4) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3+3x^2-2x+4}{x^2}dx$

(5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos x dx$

(7) $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \log x dx$

(8) $\displaystyle\int_1^2 xe^x dx$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^3 (2x+1)e^{-x} dx$

(10) $\displaystyle\int_1^2 x^4 \log x dx$

(11) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx$

(12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-2x}{1+x^2} dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(14) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x+1)^2(x-3) dx$

(15) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| dx$

(16) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (3x - \cos x)^2 dx$

(17) $\displaystyle\int_{-3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2} dx$

(18) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(\log x)^2}{x} dx$

(19) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

(20) $\displaystyle\int_{-1}^4 x\sqrt{x^2+4}\, dx$

(21) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \arctan x dx$

(22) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x dx$

(23) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

(24) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x dx$

(25) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} 2x \arctan x dx$

(26) $\displaystyle\int_0^1 2x(\arctan x)^2 dx$

(27) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x+1}{x^2-4x+8} dx$

解答

(1)
$$\begin{aligned}\int_0^2 (x^2-2x+3)dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}(8-0) - (4-0) + 3(2-0) \\ &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 (3x^2-6x+1)dx &= \left[x^3 - 3x^2 + x\right]_{-1}^3 \\ &= \{27-(-1)\} - 3(9-1) + \{3-(-1)\} \\ &= 8\end{aligned}$$

$$(3)\quad \int_{-1}^{2}(2x^2+x-6)dx = \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{2}{3}\{8-(-1)\}+\frac{1}{2}(4-1)-6\{2-(-1)\}$$
$$= -\frac{21}{2}$$

$$(4)\quad \int_{2}^{3}\frac{x^3+3x^2-2x+4}{x^2}dx = \int_{2}^{3}\left(x+3-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2+3x-2\log|x|-\frac{4}{x}\right]_{2}^{3}$$
$$= \frac{1}{2}(9-4)+3(3-2)-2(\log 3-\log 2)-4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{37}{6}-2\log\frac{3}{2}$$

$$(5)\quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \Big[\tan x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6} = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(6)\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x\cos x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= -\frac{1}{8}(\cos\pi-\cos 0)-\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)$$
$$= -\frac{1}{8}\{(-1)-1\}-\frac{1}{4}(0-1)$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$(7)\quad \int_{e^2}^{e^3}\log x dx = \Big[x\log x-x\Big]_{e^2}^{e^3}$$
$$= (e^3\log e^3-e^2\log e^2)-(e^3-e^2)$$
$$= (e^3\cdot 3-e^2\cdot 2)-(e^3-e^2)$$
$$= 2e^3-e^2$$

$$(8)\quad \int xe^x dx = xe^x-\int e^x dx$$
$$= xe^x-e^x$$

$$\begin{array}{ccc} x & & e^x \\ 1 & & e^x \end{array}$$

であるから

$$\int_1^2 xe^x dx = \Big[xe^x - e^x\Big]_1^2 = (2e^2 - 1\cdot e) - (e^2 - e) = e^2$$

(9)
$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{-x}dx &= -(2x+1)e^{-x} + 2\int e^{-x}dx \\ &= -(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} \\ &= -2xe^{-x} - 3e^{-x}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} 2x+1 & & -e^{-x} \\ 2 & & e^{-x}\end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 (2x+1)e^{-x}dx &= \Big[-2xe^{-x} - 3e^{-x}\Big]_{-1}^3 \\ &= -2\{3e^{-3} - (-1)\cdot e\} - 3(e^{-3} - e) \\ &= e - \frac{9}{e^3}\end{aligned}$$

(10)
$$\begin{aligned}\int x^4 \log x dx &= \frac{1}{5}x^5 \log x - \frac{1}{5}\int x^4 dx \\ &= \frac{1}{5}x^5 \log x - \frac{1}{25}x^5\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \log x & & \frac{1}{5}x^5 \\ \frac{1}{x} & & x^4\end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int x^4 \log x dx &= \left[\frac{1}{5}x^5 \log x - \frac{1}{25}x^5\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{5}(32\log 2 - 1\cdot \log 1) - \frac{1}{25}(32 - 1) \\ &= \frac{1}{5}(32\log 2 - 1\cdot 0) - \frac{1}{25}(32 - 1) \\ &= \frac{32}{5}\log 2 - \frac{31}{25}\end{aligned}$$

(11)
$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - 2\int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int dx\right) \\ &= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) \\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} (\log x)^2 & & x \\ 2\log x \cdot \frac{1}{x} & & 1\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \log x & & x \\ \frac{1}{x} & & 1\end{array}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_1^e (\log x)^2 dx &= \Big[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\Big]_1^e \\
&= \{e(\log e)^2 - 1\cdot(\log 1)^2\} - 2(e\log e - 1\cdot\log 1) + 2(e-1) \\
&= (e\cdot 1^2 - 1\cdot 0^2) - 2(e\cdot 1 - 1\cdot 0) + 2(e-1) \\
&= e-2
\end{aligned}
$$

(12) $$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-2x}{1+x^2}dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}\right)dx \\
&= \Big[\arctan x - \log(1+x^2)\Big]_0^1 \\
&= (\arctan 1 - \arctan 0) - (\log 2 - \log 1) \\
&= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - (\log 2 - 0) \\
&= \frac{\pi}{4} - \log 2
\end{aligned}
$$

(13) $$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \Big[\arcsin x\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

(14) $$
\begin{aligned}
\int (x+1)^2(x-3)dx &= \frac{1}{3}(x+1)^3(x-3) - \frac{1}{3}\int (x+1)^3 dx \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^3(x-3) - \frac{1}{12}(x+1)^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
x-3 & & \frac{1}{3}(x+1)^3 \\
1 & & (x+1)^2
\end{array}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^3 (x+1)^2(x-3)dx &= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3(x-3) - \frac{1}{12}(x+1)^4\right]_{-1}^3 \\
&= \frac{1}{3}\{64\cdot 0 - 0\cdot(-4)\} - \frac{1}{12}(256-0) \\
&= -\frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

(15) $$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right)dx \\
&= \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \sqrt{3} - \frac{\pi}{12} - 1
\end{aligned}
$$

(16) $\displaystyle\int (3x-\cos x)^2 dx$

$$\begin{array}{ccc} x & & \sin x \\ 1 & & \cos x \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \int (9x^2 - 6x\cos x + \cos^2 x)dx \\
&= 3x^3 - 6\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) + \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx \\
&= 3x^3 - 6(x\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) \\
&= 3x^3 + \frac{1}{2}x - 6x\sin x - 6\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (3x-\cos x)^2 dx &= \left[3x^3 + \frac{1}{2}x - 6x\sin x - 6\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 3\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{216}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 6\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&\qquad - 6\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 3\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{216}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 6\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1 - \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&\qquad - 6\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{13}{36}\pi^3 - \frac{7}{3}\pi + \frac{23\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

(17)
$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2}dx &= \int_{-3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{3^2+x^2}dx \\
&= \left[\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right]_{-3}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan(-1)\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\
&= \frac{5}{36}\pi
\end{aligned}$$

(18)
$$
\begin{aligned}
\int_e^{e^2} \frac{(\log x)^2}{x} dx &= \int_e^{e^2} (\log x)^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \left[ \frac{1}{3} (\log x)^3 \right]_e^{e^2} \\
&= \frac{1}{3} \left\{ (\log e^2)^3 - (\log e)^3 \right\} \\
&= \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

(19) $\displaystyle \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \left[ 2(x^2+4)^{\frac{1}{2}} \right]_0^2 = 2\sqrt{2} - 2$

(20)
$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^4 x\sqrt{x^2+4}\, dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^4 (x^2+4)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} (x^2+4)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^4 \\
&= \frac{1}{3} \left( 40\sqrt{5} - 5\sqrt{5} \right) \\
&= \frac{35\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}
$$

(21)
$$
\begin{aligned}
\int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\arctan x & & x \\
\dfrac{1}{1+x^2} & & 1
\end{array}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} \arctan x dx &= \left[ x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_1^{\sqrt{3}} \\
&= \left( \sqrt{3} \cdot \arctan \sqrt{3} - 1 \cdot \arctan 1 \right) - \frac{1}{2} (\log 4 - \log 2) \\
&= \left( \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 1 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \log \frac{4}{2} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(22)\quad \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x dx &= \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - (-1)\cdot\arctan(-1)\right\} - \frac{1}{2}\left(\log\frac{4}{3} - \log 2\right) \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} - (-1)\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} - \frac{1}{2}\log\frac{\frac{4}{3}}{2} \\
&= \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(11)\quad \int \arcsin x dx &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)dx \\
&= x\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\arcsin x & \times & x \\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & & 1
\end{array}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx &= \left[x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\arcsin\frac{1}{2} - 0\cdot\arcsin 0\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - 0\cdot 0\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1
\end{aligned}
$$

$$
(24)\quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

(25)
$$\begin{aligned}\int 2x\arctan x dx &= (x^2+1)\arctan x - \int dx\\ &= (x^2+1)\arctan x - x\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}\arctan x & & x^2+1\\ \dfrac{1}{1+x^2} & & 2x\end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} 2x\arctan x dx &= \Big[(x^2+1)\arctan x - x\Big]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\\ &= \left\{4\cdot\arctan\sqrt{3} - \frac{4}{3}\cdot\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} - \left\{\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}\\ &= \left\{4\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} - \left\{\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}\\ &= \frac{14}{9}\pi - \frac{4\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

(26)
$$\int 2x(\arctan x)^2 dx$$

$$\begin{array}{ccc}(\arctan x)^2 & & x^2+1\\ 2\arctan x\cdot\dfrac{1}{1+x^2} & & 2x\end{array}$$

$$\begin{aligned}&= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2\int \arctan x dx\\ &= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2\left\{x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right\}\\ &= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2x\arctan x + \log(1+x^2)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x(\arctan x)^2 dx &= \Big[(x^2+1)(\arctan x)^2 - 2x\arctan x + \log(1+x^2)\Big]_0^1\\ &= \left\{2\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 1\cdot 0^2\right\} - 2\left(1\cdot\frac{\pi}{4} - 0\cdot 0\right) + (\log 2 - 0)\\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + \log 2\end{aligned}$$

(27)
$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2-4x+8}dx &= \int \frac{(2x-4)+5}{x^2-4x+8}dx\\ &= \int\left\{\frac{2x-4}{x^2-4x+8} + \frac{5}{2^2+(x-2)^2}\right\}dx\\ &= \log(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2}\end{aligned}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{2x+1}{x^2-4x+8}dx &= \left[\log(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2}\right]_2^4 \\
&= (\log 8-\log 4)+\frac{5}{2}(\arctan 1-\arctan 0) \\
&= \log\frac{8}{4}+\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) \\
&= \log 2+\frac{5}{8}\pi
\end{aligned}
$$

**★広義積分**

(1) $f$ が $[a,\infty)$ で連続なとき

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

(2) $f$ が $(a,b]$ で連続なとき

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

**【問題 2.8】**

次の広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-2x}dx$

(3) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2-x+1}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\cos x dx$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$

(8) $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)\log x dx$

(9) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2}dx$

(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}dx$

(11) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{4}{x^4+x^2+1}dx$

解答

(1) $\displaystyle\int_0^R \frac{1}{x^2+1}dx=\Big[\arctan x\Big]_0^R=\arctan R-0=\arctan R$

であるから

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{R\to\infty}\arctan R=\frac{\pi}{2}$$

※ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ であることはグラフからわかる．

$$(2)\ \int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$$
$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

$$\begin{array}{ccc} x & & -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ 1 & & e^{-2x} \end{array}$$

であるから

$$\int_0^R xe^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^R$$
$$= -\frac{1}{2}(Re^{-2R} - 0\cdot 1) - \frac{1}{4}(e^{-2R} - 1)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}Re^{-2R} - \frac{1}{4}e^{-2R}$$

よって

$$\int_0^\infty xe^{-2x}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}Re^{-2R} - \frac{1}{4}e^{-2R}\right) = \frac{1}{4}$$

※ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0$

ここで,「$\overset{*}{=}$」のところで <ruby>L'Hospital<rt>ロピタル</rt></ruby> の定理を用いた．以降の問題も同様.

$$(3)\ \int \frac{\log x}{x^2}dx = -\frac{\log x}{x} + \int\frac{1}{x^2}dx$$
$$= -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\begin{array}{ccc} \log x & & -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & & \frac{1}{x^2} \end{array}$$

であるから

$$\int_e^R \frac{\log x}{x^2}dx = \left[-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right]_e^R$$
$$= -\left(\frac{\log R}{R} - \frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{e}\right)$$
$$= \frac{2}{e} - \frac{\log R}{R} - \frac{1}{R}$$

よって

$$\int_e^\infty \frac{\log x}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{2}{e} - \frac{\log R}{R} - \frac{1}{R}\right) = \frac{2}{e}$$

※ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{1}{x^2-x+1}dx &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^R\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\arctan\frac{2R-1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\arctan\frac{2R-1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2-x+1}dx = \lim_{R\to\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\arctan\frac{2R-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$$

(5) $\displaystyle\int e^{-3x}\cos x dx$

$$\begin{aligned}&= e^{-3x}\sin x + 3\int e^{-3x}\sin x dx\\ &= e^{-3x}\sin x + 3\left(-e^{-3x}\cos x - 3\int e^{-3x}\cos x dx\right)\\ &= e^{-3x}\sin x - 3e^{-3x}\cos x - \underbrace{9\int e^{-3x}\cos x dx}_{\text{移項}}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} e^{-3x} & & \sin x\\ -3e^{-3x} & & \cos x\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} e^{-3x} & & -\cos x\\ -3e^{-3x} & & \sin x\end{array}$$

であるから

$$\int e^{-3x}\cos x dx = \frac{1}{10}(e^{-3x}\sin x - 3e^{-3x}\cos x)$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{-3x}\cos x dx &= \left[\frac{1}{10}(e^{-3x}\sin x - 3e^{-3x}\cos x)\right]_0^R\\ &= \frac{1}{10}(e^{-3R}\sin R - 1\cdot 0) - \frac{3}{10}(e^{-3R}\cos R - 1\cdot 1)\\ &= \frac{3}{10}+\frac{1}{10}e^{-3R}\sin R - \frac{3}{10}e^{-3R}\cos R\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-3x}\cos x dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}e^{-3R}\sin R - \frac{3}{10}e^{-3R}\cos R\right) = \frac{3}{10}$$

※ $|e^{-3x}\sin x| \leqq e^{-3x}$, $|e^{-3x}\cos x| \leqq e^{-3x}$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-3x} = 0$ であるから，はさみうちの定理より

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-3x}\sin x = 0,\ \lim_{x\to\infty} e^{-3x}\cos x = 0$

(6) $\displaystyle\int_{-1+\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \Big[\arcsin x\Big]_{-1+\varepsilon}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} - \arcsin(-1+\varepsilon)$

であるから

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\frac{\pi}{6} - \arcsin(-1+\varepsilon)\right\} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

(7)
$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx &= 2\sqrt{x}\log x - 2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \log x & 2\sqrt{x} \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx &= \Big[2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x}\Big]_{\varepsilon}^{1} \\ &= 2\big(1\cdot 0 - \sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon\big) - 4\big(1-\sqrt{\varepsilon}\big) \\ &= -4 - 2\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon}\end{aligned}$$

よって

$$\int_{0}^{1} \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\big(-4 - 2\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon}\big) = -4$$

※ $\alpha > 0$ のとき

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-\alpha}} \overset{*}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{x^{\alpha}}{-\alpha} = 0$$

(8)
$$\begin{aligned}\int (2x+1)\log x dx &= (x^2+x)\log x - \int (x+1)dx \\ &= (x^2+x)\log x - \frac{1}{2}x^2 - x\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \log x & x^2+x \\ \dfrac{1}{x} & 2x+1 \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{3} (2x+1)\log x dx &= \left[(x^2+x)\log x - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{\varepsilon}^{3} \\ &= \{12\log 3 - (\varepsilon^2+\varepsilon)\log\varepsilon\} - \frac{1}{2}(9-\varepsilon^2) - (3-\varepsilon) \\ &= 12\log 3 - \frac{15}{2} - \varepsilon^2\log\varepsilon - \varepsilon\log\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{0}^{3} (2x+1)\log x dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(12\log 3 - \frac{15}{2} - \varepsilon^2\log\varepsilon - \varepsilon\log\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon\right) \\ &= 12\log 3 - \frac{15}{2}\end{aligned}$$

(9)
$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{(x+1)^2}dx &= -\frac{\log x}{x+1}+\int \frac{1}{x(x+1)}dx \\ &= -\frac{\log x}{x+1}+\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= -\frac{\log x}{x+1}+\log x-\log(x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}\log x & & -\dfrac{1}{x+1} \\ \dfrac{1}{x} & & \dfrac{1}{(x+1)^2}\end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{\log x}{(x+1)^2}dx &= \left[-\frac{\log x}{x+1}+\log x-\log(x+1)\right]_1^R \\ &= -\left(\frac{\log R}{R+1}-\frac{0}{2}\right)+(\log R-0)-\{\log(R+1)-\log 2\} \\ &= \log 2+\log\frac{R}{R+1}-\frac{\log R}{R+1}\end{aligned}$$

よって

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\log 2+\log\frac{1}{1+\frac{1}{R}}-\frac{\log R}{R+1}\right)=\log 2$$

※ $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x+1} \overset{*}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

(10) $\displaystyle \int \frac{\log x}{(x+1)^2}dx = -\frac{\log x}{x+1}+\log x-\log(x+1)=\frac{x\log x}{x+1}-\log(x+1)$

であるから

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}dx &= \left[\frac{x\log x}{x+1}-\log(x+1)\right]_\varepsilon^1 \\ &= \left(\frac{1\cdot 0}{2}-\frac{\varepsilon\log\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)-\{\log 2-\log(\varepsilon+1)\} \\ &= -\log 2+\log(\varepsilon+1)-\frac{\varepsilon\log\varepsilon}{\varepsilon+1}\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{-\log 2+\log(\varepsilon+1)-\frac{\varepsilon\log\varepsilon}{\varepsilon+1}\right\}=-\log 2$$

※ $\displaystyle \lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$

(11) $\displaystyle \frac{4}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$

が常に成り立つような定数 $A,B,C,D$ を求めると，$A=2,\ B=2,\ C=-2,\ D=2$ であるから

$$\int \frac{4}{x^4+x^2+1}dx$$
$$=\int\left(\frac{2x+2}{x^2+x+1}-\frac{2x-2}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$= \int \left\{ \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1} - \frac{(2x-1)-1}{x^2-x+1} \right\} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (x+\frac{1}{2})^2} - \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (x-\frac{1}{2})^2} \right\} dx$$

$$= \log(x^2+x+1) + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \log(x^2+x+1) + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \log \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

であるから

$$\int_1^R \frac{4}{x^4+x^2+1} dx$$

$$= \left[ \log \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_1^R$$

$$= \left( \log \frac{R^2+R+1}{R^2-R+1} - \log 3 \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan \frac{2R+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan \frac{2R-1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right)$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{4}{x^4+x^2+1} dx &= \lim_{R\to\infty} \left\{ \left( \log \frac{1+\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}}{1-\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}} - \log 3 \right) \right. \\
&\qquad + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan \frac{2R+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} \right) \\
&\qquad \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan \frac{2R-1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\
&= (0 - \log 3) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 3
\end{aligned}$$

## §3.　2 変数関数の偏微分

### ★ 2 変数関数の極値判定法

$f(x,y)$：$C^2$ 級，$(a,b) \in \mathbb{R}^2$

(1) $f(a,b)$：極値　$\Longrightarrow$　$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$

(2) $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$：極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$：極大値
$H(a,b)<0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする．

☆まずは連立方程式 $f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0$ を解いて停留点を求める．次に停留点に対して $H(x,y),\ f_{xx}(x,y)$ の符号を調べて極値の判定をする．

【例題】
次の関数の停留点を求め，極値の判定をせよ．

(1) $f(x,y)=x^3+x^2y-xy-y^2$　　(2) $f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2$

(3) $f(x,y)=x^3+y^3+x^2+y^2+xy$

解答
(1) $f(x,y)=x^3+x^2y-xy-y^2$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+2xy-y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=x^2-x-2y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$y=\dfrac{x^2-x}{2}$

① へ代入すると

$$3x^2+2x\cdot\frac{x^2-x}{2}-\frac{x^2-x}{2}=0$$
$$6x^2+2x(x^2-x)-(x^2-x)=0$$
$$2x^3+3x^2+x=0$$
$$x(x+1)(2x+1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,-1,-\frac{1}{2}$$

$x=0$ のとき，② より　$y=0$
$x=-1$ のとき，② より　$y=1$
$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき，② より　$y=\dfrac{3}{8}$

よって，停留点は　$(0,0),\ (-1,1),\ \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{8}\right)$

判定

$f_{xx}(x,y)=6x+2y,\ f_{yy}(x,y)=-2,\ f_{xy}(x,y)=2x-1$

$H(x,y)=(6x+2y)\cdot(-2)-(2x-1)^2$

・$H(0,0)=0\cdot(-2)-(-1)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない
・$H(-1,1)=(-4)\cdot(-2)-(-3)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(-1,1)$：極値でない
・$H\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{8}\right)=\left(-\dfrac{9}{4}\right)\cdot(-2)-(-2)^2=\dfrac{1}{2}>0,\ f_{xx}\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{8}\right)=-\dfrac{9}{4}<0$

$$\therefore \quad f\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{64}\text{：極大値}$$

(2) $f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=6xy-6x=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=3x^2+3y^2-6y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$6x(y-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0$　または　$y=1$
$x=0$ のとき，② より

$$3y^2-6y=0$$
$$3y(y-2)=0 \qquad \therefore \quad y=0,2$$

$y=1$ のとき，② より

$$3x^2-3=0$$
$$x^2=1 \qquad \therefore \quad x=\pm 1$$

よって，停留点は　$(0,0),\ (0,2),\ (\pm1,1)$

判定
$f_{xx}(x,y)=6y-6,\ f_{yy}(x,y)=6y-6,\ f_{xy}(x,y)=6x$

$H(x,y)=(6y-6)(6y-6)-(6x)^2$

・$H(0,0)=(-6)\cdot(-6)-0^2=36>0,\ f_{xx}(0,0)=-6<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)=0$：極大値

・$H(0,2)=6\cdot6-0^2=36>0,\ f_{xx}(0,2)=6>0 \qquad \therefore \quad f(0,2)=-4$：極小値

・$H(\pm1,1)=0\cdot0-(\pm6)^2=-36<0 \qquad \therefore \quad f(\pm1,1)$：極値でない

(3) $f(x,y)=x^3+y^3+x^2+y^2+xy$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+2x+y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=3y^2+2y+x=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$$3(x-y)(x+y)+(x-y)=0$$
$$(x-y)\{3(x+y)+1\}=0 \qquad \therefore \quad y=x \quad \text{または} \quad x+y=-\frac{1}{3}$$

(i) $y=x$ のとき，① より

$$3x^2+3x=0$$
$$x(x+1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,-1$$

(ii) $x+y=-\dfrac{1}{3}$ のとき，①＋② より

$$3\{(x+y)^2-2xy\}+3(x+y)=0$$
$$3\left(\frac{1}{9}-2xy\right)-1=0 \qquad \therefore \quad xy=-\frac{1}{9}$$

これより，$x,y$ は $t^2+\dfrac{1}{3}t-\dfrac{1}{9}=0$ すなわち $9t^2+3t-1=0$ の解となる（解と係数の関係）．
実際に解くと $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{6}$ となるから，簡単のため

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{5}}{6},\ \beta=\frac{-1+\sqrt{5}}{6}$$

とおく．このとき，$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{3},\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{9}$ となることに注意する．

以上 (i),(ii) より，停留点は　$(0,0),\ (-1,-1),\ (\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha)$

※① より $y=-3x^2-2x$ として，これを ② へ代入しても停留点を求めることはできる．

判定

$f_{xx}(x,y)=6x+2,\ f_{yy}(x,y)=6y+2,\ f_{xy}(x,y)=1$

$H(x,y)=(6x+2)\cdot(6y+2)-1^2=36xy+12(x+y)+3$

・$H(0,0)=2\cdot 2-1^2=3>0,\ f_{xx}(0,0)=2>0 \qquad \therefore \quad f(0,0)=0$：極小値

・$H(-1,-1)=(-4)\cdot(-4)-1^2=15>0,\ f_{xx}(-1,-1)=-4<0$

$\qquad \therefore \quad f(-1,-1)=1$：極大値

・$H(\alpha,\beta)=H(\beta,\alpha)=36\alpha\beta+12(\alpha+\beta)+3=-4-4+3=-5<0$

$\qquad \therefore \quad f(\alpha,\beta),\ f(\beta,\alpha)$：極値でない

**【問題 3.1】**

次の関数の停留点を求め，極値の判定をせよ．

(1) $f(x,y)=x^4+2x^2+y^3-3y$

(2) $f(x,y)=x^3-6xy+3y^2$

(3) $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$

(4) $f(x,y)=2x^4+y^2-2xy$

(5) $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2+4x-4y$

(6) $f(x,y)=x^3y-3xy-y^2$

(7) $f(x,y)=3xy^2+y^3-6x^2-24x$

(8) $f(x,y)=x^2-2xy^2-y+2y^3$

(9) $f(x,y)=x^2-x^2y+2y^2-y^3$

(10) $f(x,y)=xy-x^2y-2xy^2$

(11) $f(x,y)=xy-x^2y-xy^3$

(12) $f(x,y)=x^3y+xy^3-xy$

(13) $f(x,y)=x^3+y^3-2x^2-2y^2+xy$

解答

(1) $f(x,y)=x^4+2x^2+y^3-3y$

<u>停留点</u>

$$\begin{cases} f_x(x,y)=4x^3+4x=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=3y^3-3=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$4x(x^2+1)=0$　　$\therefore$　$x=0$（$x$ は実数だから）
② より　$3(y^2-1)=0$　　$\therefore$　$y=\pm 1$

よって，停留点は　$(0,1),\ (0,-1)$

<u>判定</u>
$f_{xx}(x,y)=12x^2+4,\ f_{yy}(x,y)=6y,\ f_{xy}(x,y)=0$

$H(x,y)=(12x^2+4)\cdot 6y-0^2$

・$H(0,1)=4\cdot 6-0^2=24>0,\ f_{xx}(0,1)=4>0$　　$\therefore$　$f(0,1)=-2$：極小値

・$H(0,-1)=4\cdot(-6)-0^2=-24<0$　　$\therefore$　$f(0,-1)$：極値でない

(2) $f(x,y)=x^3-6xy+3y^2$

<u>停留点</u>

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-6y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=-6x+6y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$y=x$
① へ代入すると

$$\begin{aligned} &3x^2-6x=0 \\ &3x(x-2)=0 \quad \therefore \quad x=0,2 \end{aligned}$$

$x=0$ のとき，② より　$y=0$
$x=2$ のとき，② より　$y=2$

よって，停留点は　$(0,0),\ (2,2)$

<u>判定</u>
$f_{xx}(x,y)=6x,\ f_{yy}(x,y)=6,\ f_{xy}(x,y)=-6$

$H(x,y)=6x\cdot 6-(-6)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 6-(-6)^2=-36<0$　　$\therefore$　$f(0,0)$：極値でない

・$H(2,2)=12\cdot 6-(-6)^2=36>0,\ f_{xx}(2,2)=12>0$　　$\therefore$　$f(2,2)=-4$：極小値

(3) $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$

<u>停留点</u>

$$\begin{cases} f_x(x,y)=4x^3-4y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=4y^3-4x=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$y=x^3$

② へ代入すると

$$4x^9-4x=0$$
$$4x(x^8-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,\pm 1$$

$x=0$ のとき，① より　$y=0$
$x=\pm 1$ のとき，① より　$y=\pm 1$（複号同順）

よって，停留点は　$(0,0),\ (\pm 1,\pm 1)$（複号同順）

判定
$f_{xx}(x,y)=12x^2,\ f_{yy}(x,y)=12y^2,\ f_{xy}(x,y)=-4$

$H(x,y)=12x^2\cdot 12y^2-(-4)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 0-(-4)^2=-16<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない

・$H(\pm 1,\pm 1)=12\cdot 12-(-4)^2=128>0,\ f_{xx}(\pm 1,\pm 1)=12>0$

$$\therefore \quad f(\pm 1,\pm 1)=-2 \text{：極小値（複号同順）}$$

(4) $f(x,y)=2x^4+y^2-2xy$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=8x^3-2y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=2y-2x=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$y=x$
① へ代入すると

$$8x^3-2x=0$$
$$2x(4x^2-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,\pm\frac{1}{2}$$

$x=0$ のとき，② より　$y=0$

$x=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，② より　$y=\pm\dfrac{1}{2}$（複号同順）

よって，停留点は　$(0,0),\ \left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$（複号同順）

判定
$f_{xx}(x,y)=24x^2,\ f_{yy}(x,y)=2,\ f_{xy}(x,y)=-2$

$H(x,y)=24x^2\cdot 2-(-2)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 2-(-2)^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない

・$H\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)=6\cdot 2-(-2)^2=8>0,\ f_{xx}\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)=6>0$

$$\therefore \quad f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8} \text{：極小値（複号同順）}$$

(5) $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 + 4x - 4y$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 - 4y + 4 = 0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = -4x + 4y - 4 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$y = x + 1$
① へ代入すると

$$\begin{aligned} &4x^3 - 4(x+1) + 4 = 0 \\ &4x^3 - 4x = 0 \\ &4x(x^2 - 1) = 0 \qquad \therefore \quad x = 0, \pm 1 \end{aligned}$$

$x = 0$ のとき，② より　$y = 1$
$x = 1$ のとき，② より　$y = 2$
$x = -1$ のとき，② より　$y = 0$

よって，停留点は　$(0,1),\ (1,2),\ (-1,0)$

判定
$f_{xx}(x,y) = 12x^2,\ f_{yy}(x,y) = 4,\ f_{xy}(x,y) = -4$

$H(x,y) = 12x^2 \cdot 4 - (-4)^2$

・$H(0,1) = 0 \cdot 4 - (-4)^2 = -16 < 0 \qquad \therefore \quad f(0,1)$：極値でない

・$H(1,2) = 12 \cdot 4 - (-4)^2 = 32 > 0,\ f_{xx}(1,2) = 12 > 0 \qquad \therefore \quad f(1,2) = -3$：極小値

・$H(-1,0) = 12 \cdot 4 - (-4)^2 = 32 > 0,\ f_{xx}(-1,0) = 12 > 0 \qquad \therefore \quad f(-1,0) = -3$：極小値

(6) $f(x,y) = x^3y - 3xy - y^2$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2y - 3y = 0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = x^3 - 3x - 2y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$y = \dfrac{x^3 - 3x}{2}$
① へ代入すると

$$\begin{aligned} &3x^2 \cdot \frac{x^3 - 3x}{2} - 3 \cdot \frac{x^3 - 3x}{2} = 0 \\ &x^2(x^3 - 3x) - (x^3 - 3x) = 0 \\ &(x^3 - 3x)(x^2 - 1) = 0 \\ &x(x^2 - 3)(x^2 - 1) = 0 \qquad \therefore \quad x = 0, \pm\sqrt{3}, \pm 1 \end{aligned}$$

$x = 0$ のとき，② より　$y = 0$
$x = \pm\sqrt{3}$ のとき，② より　$y = 0$
$x = \pm 1$ のとき，② より　$y = \mp 1$（複号同順）

よって，停留点は　$(0,0),\ (\pm\sqrt{3},0),\ (\pm 1, \mp 1)$（複号同順）

判定

$f_{xx}(x,y) = 6xy,\ f_{yy}(x,y) = -2,\ f_{xy}(x,y) = 3x^2 - 3$

$H(x,y) = 6xy \cdot (-2) - (3x^2-3)^2$

・$H(0,0) = 0 \cdot (-2) - (-3)^2 = -9 < 0 \qquad \therefore\quad f(0,0)$：極値でない

・$H(\pm\sqrt{3},0) = 0 \cdot (-2) - 6^2 = -36 < 0 \qquad \therefore\quad f(\pm\sqrt{3},0)$：極値でない

・$H(\pm 1,\mp 1) = (-6) \cdot (-2) - 0^2 = 12 > 0,\ f_{xx}(\pm 1,\mp 1) = -6 < 0$

$\qquad\qquad \therefore\quad f(\pm 1,\mp 1) = 1$：極大値（複号同順）

(7) $f(x,y) = 3xy^2 + y^3 - 6x^2 - 24x$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3y^2 - 12x - 24 = 0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = 6xy + 3y^2 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$x = \dfrac{y^2-8}{4}$

② へ代入すると

$$6 \cdot \frac{y^2-8}{4} \cdot y + 3y^2 = 0$$
$$(y^2-8)y + 2y^2 = 0$$
$$y(y^2+2y-8) = 0$$
$$y(y-2)(y+4) = 0 \qquad \therefore\quad y = 0, 2, -4$$

$y = 0$ のとき，① より　$x = -2$

$y = 2$ のとき，① より　$x = -1$

$y = -4$ のとき，① より　$x = 2$

よって，停留点は　$(-2,0),\ (-1,2),\ (2,-4)$

判定

$f_{xx}(x,y) = -12,\ f_{yy}(x,y) = 6x + 6y,\ f_{xy}(x,y) = 6y$

$H(x,y) = (-12) \cdot (6x+6y) - (6y)^2$

・$H(-2,0) = (-12) \cdot (-12) - 0^2 = 144 > 0,\ f_{xx}(-2,0) = -12 < 0$

$\qquad\qquad \therefore\quad f(-2,0) = 24$：極大値

・$H(-1,2) = (-12) \cdot 6 - 12^2 = -216 < 0 \qquad \therefore\quad f(-1,2)$：極値でない

・$H(2,-4) = (-12) \cdot (-12) - (-24)^2 = -432 < 0 \qquad \therefore\quad f(2,-4)$：極値でない

(8) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 - y + 2y^3$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - 2y^2 = 0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = -4xy - 1 + 6y^2 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$x = y^2$

② へ代入すると

$$-4y^3 - 1 + 6y^2 = 0$$
$$4y^3 - 6y^2 + 1 = 0$$
$$(2y-1)(2y^2 - 2y - 1) = 0 \qquad \therefore \quad y = \frac{1}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$y = \dfrac{1}{2}$ のとき，① より　$x = \dfrac{1}{4}$

$y = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ のとき，① より　$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$（複号同順）

よって，停留点は　$\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}, \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)$（複号同順）

判定

$f_{xx}(x,y) = 2,\ f_{yy}(x,y) = -4x + 12y,\ f_{xy}(x,y) = -4y$

$H(x,y) = 2 \cdot (-4x + 12y) - (-4y)^2$

・$H\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot 5 - (-2)^2 = 6 > 0,\ f_{xx}\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) = 2 > 0$

$$\therefore \quad f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{16} \text{：極小値}$$

・$H\left(\dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}, \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot (2 \pm 4\sqrt{3}) - (-2 \mp 2\sqrt{3})^2 = -12 < 0$

$$\therefore \quad f\left(\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right) \text{：極値でない（複号同順）}$$

(9) $f(x,y) = x^2 - x^2 y + 2y^2 - y^3$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - 2xy = 0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = -x^2 + 4y - 3y^2 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$2x(1-y) = 0 \qquad \therefore \quad x = 0$　または　$y = 1$

$x = 0$ のとき，② より

$$4y - 3y^2 = 0$$
$$y(4 - 3y) = 0 \qquad \therefore \quad y = 0, \frac{4}{3}$$

$y = 1$ のとき，② より

$$-x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = 1 \qquad \therefore \quad x = \pm 1$$

よって，停留点は　$(0,0)$，$\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$，$(\pm 1, 1)$

判定

$f_{xx}(x,y) = 2 - 2y,\ f_{yy}(x,y) = 4 - 6y,\ f_{xy}(x,y) = -2x$

$H(x,y)=(2-2y)(4-6y)-(-2x)^2$

・$H(0,0)=2\cdot 4-0^2=8>0,\ f_{xx}(0,0)=2>0 \qquad \therefore \quad f(0,0)=0$：極小値

・$H\left(0,\dfrac{4}{3}\right)=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\cdot(-4)-0^2=\dfrac{8}{3}>0,\ f_{xx}\left(0,\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}<0$

$$\therefore \quad f\left(0,\frac{4}{3}\right)=\frac{32}{27}\text{：極大値}$$

・$H(\pm 1,1)=0\cdot(-2)-(\mp 2)^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f(\pm 1,1)$：極値でない

(10) $f(x,y)=xy-x^2y-2xy^2$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=y-2xy-2y^2=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=x-x^2-4xy=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$x(1-x-4y)=0 \qquad \therefore \quad x=0$　または　$x=1-4y$

$x=0$ のとき，① より

$$y-2y^2=0$$
$$y(1-2y)=0 \qquad \therefore \quad y=0,\frac{1}{2}$$

$x=1-4y \quad \cdots ③$ のとき，① より

$$y(1-2x-2y)=0$$
$$y\{1-2(1-4y)-2y\}=0$$
$$y(6y-1)=0 \qquad \therefore \quad y=0,\frac{1}{6}$$

$y=0$ のとき，③ より　$x=1$

$y=\dfrac{1}{6}$ のとき，③ より　$x=\dfrac{1}{3}$

よって，停留点は　$(0,0),\ \left(0,\dfrac{1}{2}\right),\ (1,0),\ \left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)$

判定

$f_{xx}(x,y)=-2y,\ f_{yy}(x,y)=-4x,\ f_{xy}(x,y)=1-2x-4y$

$H(x,y)=(-2y)\cdot(-4x)-(1-2x-4y)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 0-1^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない

・$H\left(0,\dfrac{1}{2}\right)=(-1)\cdot 0-(-1)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$：極値でない

・$H(1,0)=0\cdot(-4)-(-1)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(1,0)$：極値でない

・$H\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}>0,\ f_{xx}\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{1}{3}<0$

$$\therefore \quad f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{54}\text{：極大値}$$

(11) $f(x,y)=xy-x^2y-xy^3$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=y-2xy-y^3=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=x-x^2-3xy^2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$x(1-x-3y^2)=0$　　$\therefore$　$x=0$　または　$x=1-3y^2$
$x=0$ のとき，① より

$$y-y^3=0$$
$$y(1-y^2)=0 \qquad \therefore \quad y=0,\pm 1$$

$x=1-3y^2 \quad \cdots ③$ のとき，① より

$$y(1-2x-y^2)=0$$
$$y\{1-2(1-3y^2)-y^2\}=0$$
$$y(5y^2-1)=0 \qquad \therefore \quad y=0,\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$y=0$ のとき，③ より　$x=1$

$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，③ より　$x=\dfrac{2}{5}$

よって，停留点は　$(0,0),\ (0,\pm 1),\ (1,0),\ \left(\dfrac{2}{5},\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

判定

$f_{xx}(x,y)=-2y,\ f_{yy}(x,y)=-6xy,\ f_{xy}(x,y)=1-2x-3y^2$

$H(x,y)=(-2y)\cdot(-6xy)-(1-2x-3y^2)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 0-1^2=-1<0$　　$\therefore$　$f(0,0)$：極値でない

・$H(0,\pm 1)=(\mp 2)\cdot 0-(-2)^2=-4<0$　　$\therefore$　$f(0,\pm 1)$：極値でない

・$H(1,0)=0\cdot 0-(-1)^2=-1<0$　　$\therefore$　$f(1,0)$：極値でない

・$H\left(\dfrac{2}{5},\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\left(\mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\mp\dfrac{12}{5\sqrt{5}}\right)-\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{4}{5}>0$

$$f_{xx}\left(\frac{2}{5},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}<0 \qquad \therefore \quad f\left(\frac{2}{5},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{4}{25\sqrt{5}}\text{：極大値}$$

$$f_{xx}\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}>0 \qquad \therefore \quad f\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{4}{25\sqrt{5}}\text{：極小値}$$

(12) $f(x,y)=x^3y+xy^3-xy$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2y+y^3-y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=x^3+3xy^2-x=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より　$y(3x^2+y^2-1)=0$　　$\therefore$　$y=0$　または　$y^2=1-3x^2$
$y=0$ のとき，② より

$$x^3-x=0$$

$$x(x^2-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,\pm 1$$

$y^2=1-3x^2 \quad \cdots$③ のとき，② より

$$x(x^2+3y^2-1)=0$$
$$x\{x^2+3(1-3x^2)-1\}=0$$
$$x(2-8x^2)=0 \qquad \therefore \quad x=0,\pm\frac{1}{2}$$

$x=0$ のとき，③ より $\quad y^2=1 \qquad \therefore \quad y=\pm 1$

$x=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，③ より $\quad y^2=\dfrac{1}{4} \qquad \therefore \quad y=\pm\dfrac{1}{2}$（複号任意）

よって，停留点は $\quad (0,0),\ (\pm 1,0),\ (0,\pm 1),\ \left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$（複号任意）

判定

$f_{xx}(x,y)=6xy,\ f_{yy}(x,y)=6xy,\ f_{xy}(x,y)=3x^2+3y^2-1$

$H(x,y)=6xy\cdot 6xy-(3x^2+3y^2-1)^2$

・$H(0,0)=0\cdot 0-(-1)^2=-1<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)$：極値でない

・$H(\pm 1,0)=H(0,\pm 1)=0\cdot 0-2^2=-4<0 \qquad \therefore \quad f(\pm 1,0),\ f(0,\pm 1)$：極値でない

・$H\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=2>0,\ f_{xx}\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}>0$

$$\therefore \quad f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$$：極小値（複号同順）

・$H\left(\pm\dfrac{1}{2},\mp\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=2>0,\ f_{xx}\left(\pm\dfrac{1}{2},\mp\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}<0$

$$\therefore \quad f\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$：極大値（複号同順）

(13) $f(x,y)=x^3+y^3-2x^2-2y^2+xy$

停留点

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-4x+y=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=3y^2-4y+x=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$$3(x-y)(x+y)-5(x-y)=0$$
$$(x-y)\{3(x+y)-5\}=0 \qquad \therefore \quad y=x \quad \text{または} \quad x+y=\frac{5}{3}$$

(i) $y=x$ のとき，① より

$$3x^2-3x=0$$
$$x(x-1)=0 \qquad \therefore \quad x=0,1$$

(ii) $x+y=\dfrac{5}{3}$ のとき，① + ② より

$$3\{(x+y)^2-2xy\}-3(x+y)=0$$

$$3\left(\frac{25}{9}-2xy\right)-5=0 \qquad \therefore \quad xy=\frac{5}{9}$$

これより，$x, y$ は $t^2-\frac{5}{3}t+\frac{5}{9}=0$ すなわち $9t^2-15t+5=0$ の解となる（解と係数の関係）．

実際に解くと $t=\frac{5\pm\sqrt{5}}{6}$ となるから，簡単のため

$$\alpha=\frac{5-\sqrt{5}}{6},\ \beta=\frac{5+\sqrt{5}}{6}$$

とおく．このとき，$\alpha+\beta=\frac{5}{3},\ \alpha\beta=\frac{5}{9}$ となることに注意する．

以上 (i),(ii) より，停留点は　$(0,0),\ (1,1),\ (\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha)$

※① より $y=-3x^2+4x$ として，これを ② へ代入しても停留点を求めることはできる．

判定

$f_{xx}(x,y)=6x-4,\ f_{yy}(x,y)=6y-4,\ f_{xy}(x,y)=1$

$H(x,y)=(6x-4)(6y-4)-1^2=36xy-24(x+y)+15$

・$H(0,0)=(-4)\cdot(-4)-1^2=15>0,\ f_{xx}(0,0)=-4<0 \qquad \therefore \quad f(0,0)=0$：極大値

・$H(1,1)=2\cdot 2-1^2=3>0,\ f_{xx}(1,1)=2>0 \qquad \therefore \quad f(1,1)=-1$：極小値

・$H(\alpha,\beta)=H(\beta,\alpha)=36\alpha\beta-24(\alpha+\beta)+15=20-40+15=-5<0$

$$\therefore \quad f(\alpha,\beta),\ f(\beta,\alpha)\text{：極値でない}$$

## §4.　2 変数関数の積分

**★重積分，累次積分**

立体図形を直方体で近似するという考え方により，**重積分**

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

の定義をしたが，計算するためには**累次積分**

$$\int_a^b \left\{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right\} dx$$

に直さなければならない（重積分の累次積分への直し方は後で扱う）．まずは累次積分の計算をしてみよう．累次積分とは，順番に積分するということである．

【例題】

次の累次積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 x^3 y dy\right) dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x xy dy\right) dx$

解答

(1)
$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 x^3 y dy\right) dx &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{2}y^2\right]_{y=1-x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\{1-(1-x)^2\}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2}(2x-x^2)dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^5}{2}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{12}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{7}{60}\end{aligned}$$

※ $\displaystyle\int_{1-x}^1 x^3 y\,\underset{\sim\sim}{dy}$ において，$\underset{\sim\sim}{dy}$ は $x^3y$ を $y$ で積分することを表しているから，$x^3y$ を $y$ で積分した $\dfrac{x^3}{2}y^2$ に $y=1,\ 1-x$ を代入して引き算している．

※内側の積分を抜き出して

$$\int_{1-x}^1 x^3 y dy = \left[\frac{x^3}{2}y^2\right]_{y=1-x}^{y=1} = \cdots = x^4 - \frac{x^5}{2}$$

と計算してから，これを与式へ戻して

$$\int_0^1 \left( \int_{1-x}^1 x^3 y dy \right) dx = \int_0^1 \left( x^4 - \frac{x^5}{2} \right) dx = \cdots = \frac{7}{60}$$

というように計算してもよい.

(2)
$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left( \int_{\frac{1}{x}}^x xydy \right) dx &= \int_1^2 \left[ \frac{x}{2} y^2 \right]_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} dx \\
&= \int_1^2 \frac{x}{2} \left( x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx \\
&= \int_1^2 \left( \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x} \right) dx \\
&= \left[ \frac{x^4}{8} - \frac{1}{2} \log x \right]_1^2 \\
&= \frac{1}{8}(16-1) - \frac{1}{2}(\log 2 - 0) \\
&= \frac{15}{8} - \frac{1}{2} \log 2
\end{aligned}$$

**【問題 4.1】**

次の累次積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} x^3 y dy \right) dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \left( \int_x^2 x^2 y dy \right) dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left( \int_x^{x+1} y^2 dy \right) dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^3 \left( \int_{x^2}^{2x+3} xydy \right) dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \left( \int_0^{2x+1} xdy \right) dx$

(6) $\displaystyle\int_1^2 \left( \int_0^{4-x} xdy \right) dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (2x+3y^2) dy \right\} dx$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{x^2+1}^{x+1} (x^2+2y) dy \right\} dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{1-2x} (x^2+2y^2) dy \right\} dx$

(10) $\displaystyle\int_3^6 \left( \int_1^{x^2} \frac{x}{y^2} dy \right) dx$

(11) $\displaystyle\int_1^2 \left( \int_{e^x}^{e^2} \frac{1}{xy} dy \right) dx$

(12) $\displaystyle\int_1^3 \left\{ \int_1^x \frac{1}{(x+y)^2} dy \right\} dx$

(13) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^{x^2} \frac{x^2+1}{(y+1)^3} dy \right\} dx$

(14) $\displaystyle\int_0^{\frac{4}{3}} \left( \int_{\frac{x}{2}}^{2-x} \sqrt{2y-x}\, dy \right) dx$

(15) $\displaystyle\int_1^5 \left( \int_1^x \log \frac{y}{x} dy \right) dx$

(16) $\displaystyle\int_3^5 \left( \int_2^x \frac{x}{y} dy \right) dx$

(17) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{2} x^2 e^{xy}dy\right)dx$ (18) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}}\left(\int_{x}^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx$

解答

(1)
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^{1-x} x^3 y dy\right)dx &= \int_0^1\left[\frac{x^3}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x}dx\\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2}(1-x)^2dx\\ &= \int_0^1\left(\frac{x^3}{2}-x^4+\frac{x^5}{2}\right)dx\\ &= \left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{12}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{12}\\ &= \frac{1}{120}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_x^{2} x^2 y dy\right)dx &= \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}y^2\right]_{y=x}^{y=2}dx\\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{2}(4-x^2)dx\\ &= \int_0^1\left(2x^2-\frac{x^4}{2}\right)dx\\ &= \left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^5}{10}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}-\frac{1}{10}\\ &= \frac{17}{30}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^2\left(\int_x^{x+1} y^2 dy\right)dx &= \int_{-1}^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x}^{y=x+1}dx\\ &= \int_{-1}^2 \frac{1}{3}\left\{(x+1)^3-x^3\right\}dx\\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(x+1)^4-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^2\\ &= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{4}(81-0)-\frac{1}{4}(16-1)\right\}\\ &= \frac{11}{2}\end{aligned}$$

(4) $$\int_{-1}^{3}\left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy\right)dx = \int_{-1}^{3}\left[\frac{x}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{y=2x+3}dx$$
$$= \int_{-1}^{3}\frac{x}{2}\left\{(2x+3)^2-x^4\right\}dx$$
$$= \int_{-1}^{3}\left(-\frac{x^5}{2}+2x^3+6x^2+\frac{9}{2}x\right)dx$$
$$= \left[-\frac{x^6}{12}+\frac{x^4}{2}+2x^3+\frac{9}{4}x^2\right]_{-1}^{3}$$
$$= -\frac{1}{12}(729-1)+\frac{1}{2}(81-1)+2\{27-(-1)\}+\frac{9}{4}(9-1)$$
$$= \frac{160}{3}$$

(5) $$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{2x+1} xdy\right)dx = \int_{0}^{1}[xy]_{y=0}^{y=2x+1}dx$$
$$= \int_{0}^{1}x(2x+1)dx$$
$$= \int_{0}^{1}(2x^2+x)dx$$
$$= \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$
$$= \frac{2}{3}+\frac{1}{2}$$
$$= \frac{7}{6}$$

(6) $$\int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{4-x} xdy\right)dx = \int_{1}^{2}[xy]_{y=0}^{y=4-x}dx$$
$$= \int_{1}^{2}x(4-x)dx$$
$$= \int_{1}^{2}(4x-x^2)dx$$
$$= \left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}$$
$$= 2(4-1)-\frac{1}{3}(8-1)$$
$$= \frac{11}{3}$$

$$
\begin{aligned}
(7)\quad \int_0^1 \left\{\int_0^{1-x} (2x+3y^2)dy\right\} dx &= \int_0^1 \Big[2xy+y^3\Big]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left\{2x(1-x)+(1-x)^3\right\} dx \\
&= \int_0^1 \left\{2x-2x^2+(1-x)^3\right\} dx \\
&= \left[x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}(1-x)^4\right]_0^1 \\
&= 1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}(0-1) \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\quad \int_0^1 \left\{\int_{x^2+1}^{x+1} (x^2+2y)dy\right\} dx &= \int_0^1 \Big[x^2y+y^2\Big]_{y=x^2+1}^{y=x+1} dx \\
&= \int_0^1 \Big[x^2\big\{(x+1)-(x^2+1)\big\}+\big\{(x+1)^2-(x^2+1)^2\big\}\Big] dx \\
&= \int_0^1 (-2x^4+x^3-x^2+2x)dx \\
&= \left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1 \\
&= -\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1 \\
&= \frac{31}{60}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(9)\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\int_0^{1-2x} (x^2+2y^2)dy\right\} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x^2y+\frac{2}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1-2x} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{x^2(1-2x)+\frac{2}{3}(1-2x)^3\right\} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{x^2-2x^3+\frac{2}{3}(1-2x)^3\right\} dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{2}{3}\cdot\left\{\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{4}(1-2x)^4\right\}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{24}-\frac{1}{32}-\frac{1}{12}(0-1) \\
&= \frac{3}{32}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(10)\quad \int_3^6 \left(\int_1^{x^2} \frac{x}{y^2}dy\right)dx &= \int_3^6 \left[-\frac{x}{y}\right]_{y=1}^{y=x^2} dx \\
&= \int_3^6 -x\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx \\
&= \int_3^6 \left(-\frac{1}{x}+x\right)dx \\
&= \left[-\log|x|+\frac{x^2}{2}\right]_3^6 \\
&= -(\log 6-\log 3)+\frac{1}{2}(36-9) \\
&= -\log 2+\frac{27}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(11)\quad \int_1^2 \left(\int_{e^x}^{e^2} \frac{1}{xy}dy\right)dx &= \int_1^2 \left[\frac{\log y}{x}\right]_{y=e^x}^{y=e^2} dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{x}(2-x)dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)dx \\
&= \Big[2\log x - x\Big]_1^2 \\
&= 2(\log 2-0)-(2-1) \\
&= 2\log 2-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12)\quad \int_1^3 \left\{\int_1^x \frac{1}{(x+y)^2}dy\right\}dx &= \int_1^3 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_{y=1}^{y=x} dx \\
&= \int_1^3 -\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\log x+\log(x+1)\right]_1^3 \\
&= -\frac{1}{2}(\log 3-0)+(\log 4-\log 2) \\
&= -\frac{1}{2}\log 3+\log 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(13)\quad \int_0^1 \left\{ \int_0^{x^2} \frac{x^2+1}{(y+1)^3} dy \right\} dx &= \int_0^1 \left[ -\frac{x^2+1}{2(y+1)^2} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\
&= \int_0^1 -\frac{x^2+1}{2} \left\{ \frac{1}{(x^2+1)^2} - 1 \right\} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \left( x^2 + 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} + x - \arctan x \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + 1 - \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) \right\} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(14)\quad \int_0^{\frac{4}{3}} \left( \int_{\frac{x}{2}}^{2-x} \sqrt{2y-x}\, dy \right) dx &= \int_0^{\frac{4}{3}} \left\{ \int_{\frac{x}{2}}^{2-x} (2y-x)^{\frac{1}{2}} dy \right\} dx \\
&= \int_0^{\frac{4}{3}} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2y-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=\frac{x}{2}}^{y=2-x} dx \\
&= \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{1}{3} \left\{ (4-3x)^{\frac{3}{2}} - 0 \right\} dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{4}{3}} (4-3x)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{-3} \cdot \frac{2}{5} (4-3x)^{\frac{5}{2}} \right]_0^{\frac{4}{3}} \\
&= -\frac{2}{45}(0-32) \\
&= \frac{64}{45}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(15)\quad \int_1^5 \left(\int_1^x \log\frac{y}{x}\,dy\right)dx &= \int_1^5 \left\{\int_1^x (\log y-\log x)dy\right\}dx \\
&= \int_1^5 \Big[(y\log y-y)-y\log x\Big]_{y=1}^{y=x}dx \\
&= \int_1^5 \big\{(x\log x-1\cdot 0)-(x-1)-(x-1)\log x\big\}dx \\
&= \int_1^5 \big\{\log x-(x-1)\big\}dx \\
&= \left[(x\log x-x)-\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_1^5 \\
&= (5\log 5-1\cdot 0)-(5-1)-\frac{1}{2}(16-0) \\
&= 5\log 5-12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(16)\quad \int_3^5 \left(\int_2^x \frac{x}{y}\,dy\right)dx &= \int_3^5 \Big[x\log y\Big]_{y=2}^{y=x}dx \\
&= \int_3^5 x(\log x-\log 2)dx \\
&= \int_3^5 (x\log x-x\log 2)dx \\
&= \left(\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_3^5-\frac{1}{2}\int_3^5 x\,dx\right)-\left[\frac{x^2}{2}\log 2\right]_3^5 \\
&= \frac{1}{2}(25\log 5-9\log 3)-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5-\frac{1}{2}(25-9)\log 2 \\
&= \frac{25}{2}\log 5-\frac{9}{2}\log 3-\frac{1}{4}(25-9)-8\log 2 \\
&= \frac{25}{2}\log 5-\frac{9}{2}\log 3-8\log 2-4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\log x & & \dfrac{x^2}{2} \\
\dfrac{1}{x} & & x
\end{array}
$$

$$(17)\quad \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{2} x^2 e^{xy}dy\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big[xe^{xy}\Big]_{y=\frac{1}{x}}^{y=2}dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(e^{2x}-e)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (xe^{2x}-ex)dx$$

$$\begin{array}{ccc} x & & \frac{1}{2}e^{2x} \\ 1 & & e^{2x} \end{array}$$

$$= \left(\left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2x}dx\right) - \left[\frac{e}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1\cdot e^2 - \frac{1}{2}\cdot e\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{e}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e}{4} - \frac{1}{4}(e^2-e) - \frac{3e}{8}$$

$$= \frac{e^2}{4} - \frac{3e}{8}$$

$$(18)\quad \int_{1}^{\sqrt{3}}\left(\int_{x}^{x^2}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{y}{x}\right]_{y=x}^{y=x^2}dx$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{3}}\left(\arctan x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$\begin{array}{ccc} \arctan x & & x \\ \frac{1}{1+x^2} & & 1 \end{array}$$

$$= \left(\Big[x\arctan x\Big]_{1}^{\sqrt{3}} - \int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{x}{1+x^2}dx\right) - \frac{\pi}{4}\big[x\big]_{1}^{\sqrt{3}}$$

$$= \left(\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 1\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{2x}{1+x^2}dx - \frac{\pi}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_{1}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{2}(\log 4 - \log 2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{2}\log 2$$

**★重積分の累次積分への変更**

(1) $g_1, g_2 : [a,b]$ で連続，$a \leqq x \leqq b$ で $g_1(x) \leqq g_2(x)$

$D : a \leqq x \leqq b,\ g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)$　（縦線型領域）

$f : D$ で連続

$$\Longrightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

(2) $h_1, h_2 : [c,d]$ で連続，$c \leqq y \leqq d$ で $h_1(y) \leqq h_2(y)$

$D : c \leqq y \leqq d,\ h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)$　（横線型領域）

$f : D$ で連続

$$\Longrightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy$$

**★積分の順序変更**

上の (1),(2) において

$$\int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy$$

☆積分の順序変更は次のようにする．

(1) 累次積分から積分領域の式を復元する．

(2) 積分領域を図示する．

(3) 積分領域の「型」を見直して，式も書き直す．

(4) 書き直した積分領域の式から累次積分に戻す．

【例題】

次の積分順序を変更せよ．

$$\int_1^2 \left\{ \int_{x-1}^1 f(x,y)dy \right\} dx$$

**解答**

上で述べた順序変更のやり方 (1) ～ (4) の順に従う．

(1) 累次積分の形から，積分領域は

$$D : 1 \leqq x \leqq 2,\ x-1 \leqq y \leqq 1 \quad \text{（縦線型領域）}$$

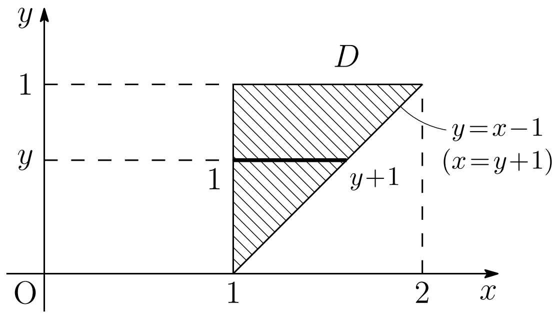
である．

(2) $x$ の範囲は 1 から 2 で，2 直線 $y = x-1$ と $y = 1$ の間だから，積分領域 $D$ は図の斜線部となる．

(3) 斜線部より，$y$ の範囲が 0 から 1 であることが読み取れる．$y$ をこの範囲から適当にとり，そこから斜線部に**横線**を引いたものが図の太線である．この太線における $x$ の範囲を求めよう．左端は 1 である．右端は直線 $y = x - 1$ 上にあり，この式は $x = y+1$ と書き直すことができるから，右端は $y + 1$ である．よって，積分領域は

$D : 0 \leqq y \leqq 1,\ 1 \leqq x \leqq y+1$　（**横線**型領域）

ともかける．




(4) (3) の積分領域から累次積分に戻せば，積分の順序変更が完成する．

$$\int_1^2 \left\{ \int_{x-1}^1 f(x,y)dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_1^{y+1} f(x,y)dx \right\} dy$$

【問題 **4.2**】

次の積分順序を変更せよ．ただし，1 つの累次積分で表せるとは限らず，複数の累次積分で表さなければならないときもある．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left\{ \int_0^{1-x} f(x,y)dy \right\} dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^3 \left\{ \int_1^{2x-1} f(x,y)dy \right\} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{1-x}^{x+1} f(x,y)dy \right\} dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{x^2-1}^{x} f(x,y)dy \right\} dx$

解答

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left\{ \int_0^{1-x} f(x,y)dy \right\} dx$

積分領域は

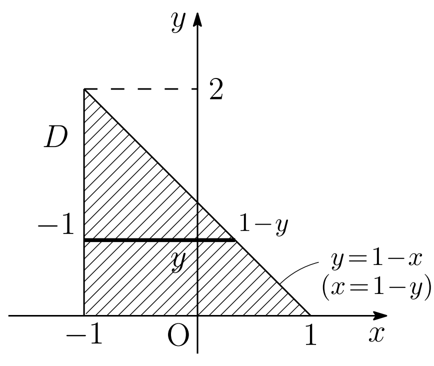
$D : -1 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 - x$

であるが，これは

$D : 0 \leqq y \leqq 2,\ -1 \leqq x \leqq 1 - y$

でもあるから

$$\int_{-1}^1 \left\{ \int_0^{1-x} f(x,y)dy \right\} dx = \int_0^2 \left\{ \int_{-1}^{1-y} f(x,y)dx \right\} dy$$



(2) $\displaystyle\int_1^3 \left\{ \int_1^{2x-1} f(x,y)dy \right\} dx$

積分領域は

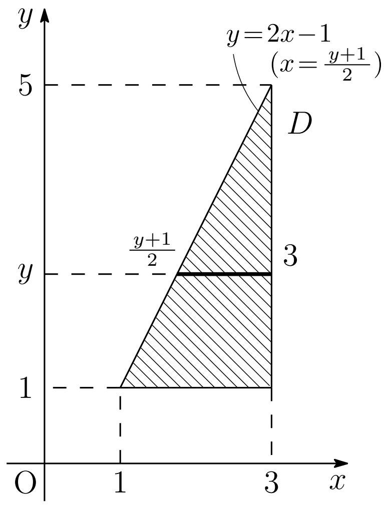
$$D: 1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2x-1$$

であるが，これは

$$D: 1 \leqq y \leqq 5,\ \frac{y+1}{2} \leqq x \leqq 3$$

でもあるから

$$\int_1^3 \left\{ \int_1^{2x-1} f(x,y)dy \right\} dx = \int_1^5 \left\{ \int_{\frac{y+1}{2}}^3 f(x,y)dx \right\} dy$$




(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{1-x}^{x+1} f(x,y)dy \right\} dx$

積分領域は

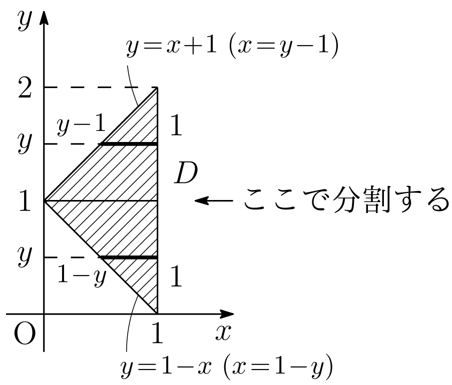
$$D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 1-x \leqq y \leqq x+1$$

であるが，これは

$$D_1: 0 \leqq y \leqq 1,\ 1-y \leqq x \leqq 1$$

$$D_2: 1 \leqq y \leqq 2,\ y-1 \leqq x \leqq 1$$

をあわせたものでもあるから




$$\int_0^1 \left\{ \int_{1-x}^{x+1} f(x,y)dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_{1-y}^1 f(x,y)dx \right\} dy + \int_1^2 \left\{ \int_{y-1}^1 f(x,y)dx \right\} dy$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{x^2-1}^{x} f(x,y)dy \right\} dx$

積分領域は

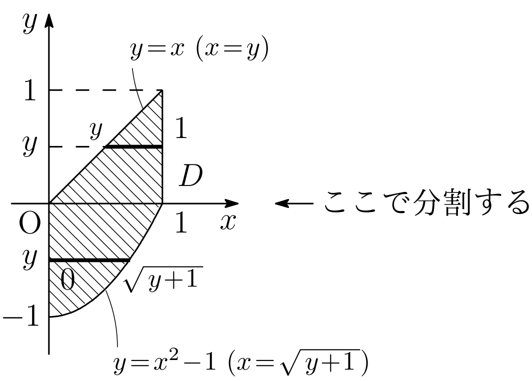
$$D: 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2-1 \leqq y \leqq x$$

であるが，これは

$$D_1: -1 \leqq y \leqq 0,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{y+1}$$

$$D_2: 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1$$

をあわせたものでもあるから

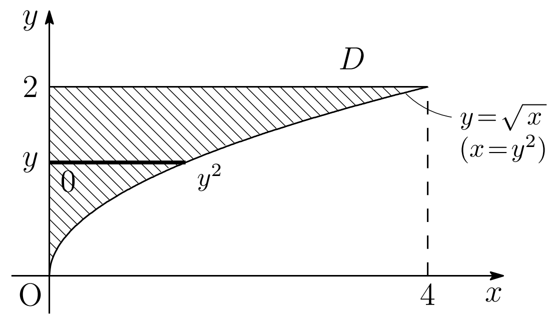



$$\int_0^1 \left\{ \int_{x^2-1}^{x} f(x,y)dy \right\} dx = \int_{-1}^0 \left\{ \int_0^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx \right\} dy + \int_0^1 \left\{ \int_y^1 f(x,y)dx \right\} dy$$

【問題 **4.3**】
積分の順序変更により，次の積分を求めよ．

$$\int_0^4 \left\{ \int_{\sqrt{x}}^2 (y^3+1)^{-\frac{5}{2}} dy \right\} dx$$

解答




積分領域は

$$D : 0 \leqq x \leqq 4,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq 2$$

であるが，これは

$$D : 0 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq y^2$$

でもあるから

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \left\{ \int_{\sqrt{x}}^2 (y^3+1)^{-\frac{5}{2}} dy \right\} dx &= \int_0^2 \left\{ \int_0^{y^2} (y^3+1)^{-\frac{5}{2}} dx \right\} dy \\
&= \int_0^2 \Big[ x(y^3+1)^{-\frac{5}{2}} \Big]_{x=0}^{x=y^2} dy \\
&= \int_0^2 y^2(y^3+1)^{-\frac{5}{2}} dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^2 (y^3+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 3y^2 dy \\
&= \frac{1}{3}\left[ -\frac{2}{3}(y^3+1)^{-\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\
&= -\frac{2}{9}\left( \frac{1}{27} - 1 \right) \\
&= \frac{52}{243}
\end{aligned}$$

★変数変換の公式
極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} r \geqq 0 \\ \theta : 1\ \text{周分} \end{pmatrix}$$

により，$(r, \theta)$ 領域 $D'$ が $(x, y)$ 領域 $D$ へうつされるとき，$D$ で連続な関数 $f$ に対して

$$\int\!\!\int_D f(x,y) dxdy = \int\!\!\int_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot \boldsymbol{r} drd\theta$$

が成り立つ．

☆$(x,y)$ 領域 $D$ に対して，$(r,\theta)$ 領域 $D'$ は次のように求める．

①：$D$ を図示する．

②：$D$ 内に点 $(x,y)$ をとる．

③：原点と ② の点を結び，さらに境界まで伸ばす．

④：③ の線分が原点のまわりで動ける範囲をかく．

⑤：④ から $\theta$ の範囲を求める．

⑥：③ から $r$ の範囲を求める．

※ $D$ の図示が困難なときでも，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$（$r\geqq 0,\ \theta:1$ 周分）を $D$ の式に代入して，$r,\theta$ の連立不等式を解けば $D'$ を求めることができる．

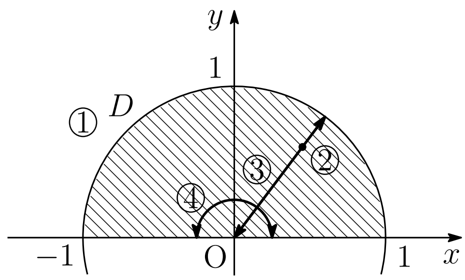
【例題】

(1) $D: x^2+y^2\leqq 1,\ y\geqq 0$

は図の斜線部である．④, ③ から範囲を求めれば

$$D': 0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq r\leqq 1$$

であることがわかる．

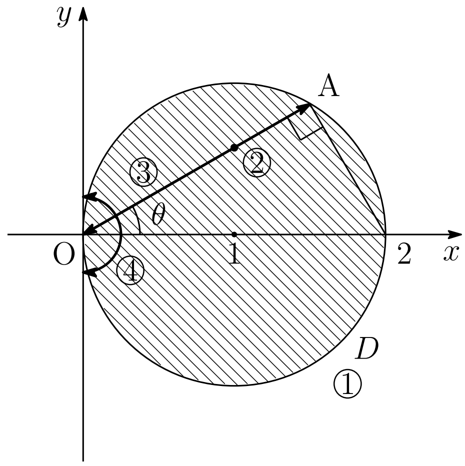



(2) $D: x^2+y^2\leqq 2x$

は図の斜線部である．$\mathrm{OA}=2\cos\theta$ であることに注意して ④, ③ から範囲を求めれば

$$D': -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq r\leqq 2\cos\theta$$

であることがわかる．




【公式】

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (n=0)\\ 1 & (n=1)\\ \dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n=2,4,6,\dots)\\ \dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3}\cdot 1 & (n=3,5,7,\dots)\end{cases}$$

証明

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ において，$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = -1, \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & \to & 0 \end{array}$$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$$

よって，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ について示せばよい．

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とおくと

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

である．また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{array}{ccc} \cos^{n-1} x & & \sin x \\ & \searrow \swarrow & \\ (n-1)\cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) & & \cos x \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x dx \\ &= \Big[\cos^{n-1} x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= (0 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx \\ &= (n-1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \right) \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

であるから，漸化式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$

が得られる．よって，$n = 2, 4, 6, \ldots$ のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &\vdots \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 1}{n \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

また，$n=3,5,7,\ldots$ のとき

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\
&\vdots \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} I_1 \\
&= \frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3} \cdot 1 \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

**【問題 4.4】**

極座標変換により，次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle \int\!\!\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+8}} dxdy \qquad (D: x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0)$

(2) $\displaystyle \int\!\!\int_D \log(x^2+y^2) dxdy \qquad (D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(3) $\displaystyle \int\!\!\int_D y^2 dxdy \qquad (D: x^2+y^2 \leqq 2x)$

(4) $\displaystyle \int\!\!\int_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy \qquad (D: x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0)$

(5) $\displaystyle \int\!\!\int_D x^2 dxdy \qquad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(6) $\displaystyle \int\!\!\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy \qquad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(7) $\displaystyle \int\!\!\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \qquad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(8) $\displaystyle \int\!\!\int_D y dxdy \qquad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

解答

(1) $$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+8}}dxdy \qquad (D: x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0)$$

$$= \iint_{D'} \frac{1}{\sqrt{r^2+8}} \cdot rdrd\theta \qquad (D': 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq r \leqq 1)$$

$$= \iint_{D'} \frac{r}{\sqrt{r^2+8}}drd\theta$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{r^2+8}}dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left\{\frac{1}{2}\int_0^1 (r^2+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2rdr\right\}d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{1}{2}\left[2(r^2+8)^{\frac{1}{2}}\right]_{r=0}^{r=1}d\theta$$

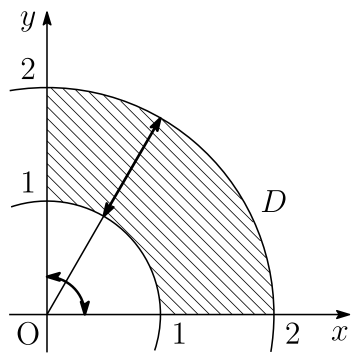
$$= \int_0^\pi \left(3-2\sqrt{2}\right)d\theta$$

$$= \left(3-2\sqrt{2}\right)\left[\theta\right]_0^\pi$$

$$= \left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$$

(2) $$\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy \qquad (D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

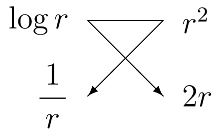
$$= \iint_{D'} \log r^2 \cdot rdrd\theta \qquad \left(D': 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 1 \leqq r \leqq 2\right)$$




$$= \iint_{D'} 2r\log r drd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 2r\log r dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[r^2\log r\right]_{r=1}^{r=2} - \int_1^2 rdr\right)d\theta$$




$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(4\log 2 - 1\cdot 0) - \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^{r=2}\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{4\log 2 - \frac{1}{2}(4-1)\right\}d\theta$$

$$= \left(4\log 2 - \frac{3}{2}\right)\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(4\log 2 - \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \left(2\log 2 - \frac{3}{4}\right)\pi$$

(3) $\displaystyle\int\int_D y^2 dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leqq 2x)$

$$= \int\int_{D'} r^2 \sin^2\theta \cdot r dr d\theta \qquad \left(D' : -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta\right)$$

$$= \int\int_{D'} r^3 \sin^2\theta dr d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^3 \sin^2\theta dr\right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\sin^2\theta\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta \sin^2\theta d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta(1-\cos^2\theta) d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta - \cos^6\theta) d\theta$$

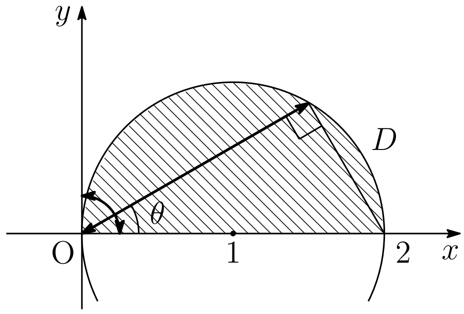
$$= 8\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

(4) $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0)$

$$= \int\int_{D'} (r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot r dr d\theta \qquad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta\right)$$

$$= \int\int_{D'} r^4 dr d\theta$$




$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^4 dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5}\cos^5\theta d\theta$$

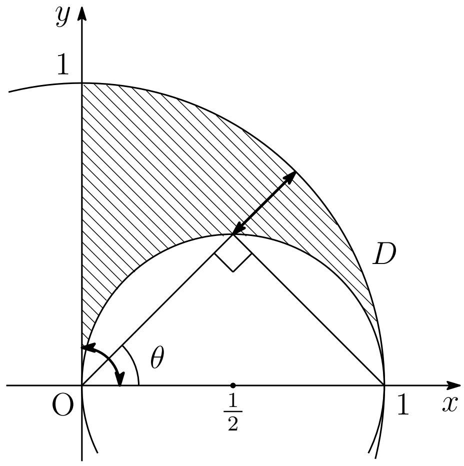
$$= \frac{32}{5}\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdot 1$$

$$= \frac{256}{75}$$

(5) $\displaystyle\iint_D x^2 dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

$$= \iint_{D'} r^2\cos^2\theta\cdot rdrd\theta \qquad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right)$$

$$= \iint_{D'} r^3\cos^2\theta drd\theta$$




$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\cos\theta}^1 r^3\cos^2\theta dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\cos^2\theta\right]_{r=\cos\theta}^{r=1}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(1-\cos^4\theta)\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\cos^6\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{128}\pi$$

(6) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

$$= \iint_{D'}\sqrt{1-r^2}\cdot rdrd\theta \qquad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{1}{2}\int_{\cos\theta}^1(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2r)dr\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=\cos\theta}^{r=1}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}(0-\sin^3\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot1$$

$$= \frac{2}{9}$$

$$
\begin{aligned}
(7)\quad & \int\!\!\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0) \\
&= \int\!\!\int_{D'} \sqrt{r^2} \cdot r dr d\theta \qquad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right) \\
&= \int\!\!\int_{D'} r^2 dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^1 r^2 dr\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=\cos\theta}^{r=1} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(1-\cos^3\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & \int\!\!\int_D y dxdy \qquad (D : x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0) \\
&= \int\!\!\int_{D'} r\sin\theta \cdot r dr d\theta \qquad \left(D' : 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right) \\
&= \int\!\!\int_{D'} r^2 \sin\theta dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^1 r^2 \sin\theta dr\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_{r=\cos\theta}^{r=1} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(1-\cos^3\theta)\sin\theta d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\sin\theta + \cos^3\theta \cdot (-\sin\theta)\right\} d\theta \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \left[\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{1}{4}(0-1)\right\} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$