科目名	数学A	対象	1i-1	学部 研究科	工学部第二部	学科 専攻科		学籍番号		評点
平成 27 年 1 月 20 日 (火) 2 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験時間	60 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

2014 年度 I 科 1 組　後期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ．**(1) は答のみでよい．**

$$\frac{x^2-7x-27}{(x-3)(x^2+6x+12)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+12}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-7x-27}{(x-3)(x^2+6x+12)}dx$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $\sqrt{4x^2+9x+1}+2x = t$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+9x+1}}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(x,y) = x^3+xy^2+4x^2+y^2-2xy+5x-2y$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．**(1) は答のみでよい．**

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 \implies f(a,b)$：極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極大値
$H(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ とする．

$\boxed{4}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2x\arctan x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{-1}^{x^2}(2x-3y)dy\right\}dx$

(3) $\displaystyle\int_1^3\left(\int_{x^3}^{x^6}\frac{x^5}{y^2}dy\right)dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^x (x+1)e^{2y}dy\right\}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^5\left\{\int_{\frac{2}{5}x}^{2} y(y^3+1)^{-\frac{3}{2}}dy\right\}dx$　（順序変更）

東京理科大学 平成 年 月 日 **試験答案**

科目名		担当	先生	評点
該当学部を○で囲む	理学部 1 / 工学部 2	部 学科 年 番	氏名	I−1

[1]

(1) $\dfrac{x^2-7x-27}{(x-3)(x^2+6x+12)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{Bx+C}{x^2+6x+12}$ の分母をはらうと

$x^2-7x-27 = A(x^2+6x+12)+(Bx+C)(x-3)$

・$x=3$ を代入 $-39=39A$ $\therefore A=-1$

・$x=0$ を代入 $-27=12A-3C$

$-27=-12-3C$ $\therefore C=5$

・$x=1$ を代入 $-33=19A-2(B+C)$

$-33=-19-2(B+5)$ $\therefore B=2$

よって, $A=-1,\ B=2,\ C=5$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-7x-27}{(x-3)(x^2+6x+12)}dx$

$\displaystyle = \int\left(-\frac{1}{x-3}+\frac{2x+5}{x^2+6x+12}\right)dx$

$\displaystyle = \int\left\{-\frac{1}{x-3}+\frac{(2x+6)-1}{x^2+6x+12}\right\}dx$

$\displaystyle = \int\left\{-\frac{1}{x-3}+\frac{2x+6}{x^2+6x+12}-\frac{1}{(\sqrt{3})^2+(x+3)^2}\right\}dx$

$\displaystyle = -\log|x-3| + \log(x^2+6x+12) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+3}{\sqrt{3}}$

[2]

$\sqrt{4x^2+9x+1}+2x=t$ とおくと $\sqrt{4x^2+9x+1}=t-2x$

両辺2乗して

$4x^2+9x+1=t^2-4tx+4x^2$

$(4t+9)x=t^2-1$

$\therefore x=\dfrac{t^2-1}{4t+9}$

また

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t\cdot(4t+9)-(t^2-1)\cdot 4}{(4t+9)^2}=\dfrac{2(2t^2+9t+2)}{(4t+9)^2}$

さらに

$\sqrt{4x^2+9x+1}=t-2x=t-\dfrac{2(t^2-1)}{4t+9}=\dfrac{2t^2+9t+2}{4t+9}$

よって

$\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{4x^2+9x+1}}dx=\int\frac{1}{\frac{t^2-1}{4t+9}\cdot\frac{2t^2+9t+2}{4t+9}}\cdot\frac{2(2t^2+9t+2)}{(4t+9)^2}dt$

$\displaystyle =\int\frac{2}{t^2-1}dt$

$\displaystyle =\int\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt$

$\displaystyle =\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\log|t-1|-\log|t+1|$

[3]

$f(x,y)=x^3+xy^2+4x^2+y^2-2xy+5x-2y$

(1) $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+y^2+8x-2y+5=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y)=2xy+2y-2x-2=0 & \cdots ② \end{cases}$

② より

$2y(x+1)-2(x+1)=0$

$2(x+1)(y-1)=0$

$\therefore x=-1$ または $y=1$

(i) $x=-1$ のとき, ① より

$3+y^2-8-2y+5=0$

$y(y-2)=0$ $\therefore y=0,2$

(ii) $y=1$ のとき, ① より

$3x^2+1+8x-2+5=0$

$3x^2+8x+4=0$

$(x+2)(3x+2)=0$ $\therefore x=-2,-\frac{2}{3}$

以上 (i), (ii) より, 停留点は

$(-1,0),\ (-1,2),\ (-2,1),\ (-\frac{2}{3},1)$

(2) $f_{xx}(x,y)=6x+8$, $f_{yy}(x,y)=2x+2$, $f_{xy}(x,y)=2y-2$

$H(x,y)=(6x+8)(2x+2)-(2y-2)^2$

・$H(-1,0)=2\cdot 0-(-2)^2=-4<0$

$\therefore f(-1,0)$: 極値でない

・$H(-1,2)=2\cdot 0-2^2=-4<0$

$\therefore f(-1,2)$: 極値でない

・$H(-2,1)=(-4)\cdot(-2)-0^2=8>0$, $f_{xx}(-2,1)=-4<0$

$\therefore f(-2,1)=-1$: 極大値

・$H(-\frac{2}{3},1)=4\cdot\frac{2}{3}-0^2=\frac{8}{3}>0$, $f_{xx}(-\frac{2}{3},1)=4>0$

$\therefore f(-\frac{2}{3},1)=-\frac{59}{27}$: 極小値

$\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2x\arctan x\,dx$

$\begin{array}{ccc} \arctan x & & x^2+1 \\ \frac{1}{1+x^2} & & 2x \end{array}$

$\displaystyle = \Big[(x^2+1)\arctan x\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx$

$\displaystyle = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{6} - 1\cdot 0\right) - \Big[x\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\displaystyle = \frac{2}{9}\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{-1}^{x^2}(2x-3y)\,dy\right\}dx$

$\displaystyle = \int_{-1}^{2}\Big[2xy - \frac{3}{2}y^2\Big]_{y=-1}^{y=x^2}dx$

$\displaystyle = \int_{-1}^{2}\left\{\left(2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right) - \left(-2x - \frac{3}{2}\right)\right\}dx$

$\displaystyle = \Big[\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{10}x^5 + x^2 + \frac{3}{2}x\Big]_{-1}^{2}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(16-1) - \frac{3}{10}\{32-(-1)\} + (4-1) + \frac{3}{2}\{2-(-1)\}$

$\displaystyle = \frac{51}{10}$

(3) $\displaystyle\int_1^3\left(\int_{x^3}^{x^6}\frac{x^5}{y^2}\,dy\right)dx = \int_1^3\Big[-\frac{x^5}{y}\Big]_{y=x^3}^{y=x^6}dx$

$\displaystyle = \int_1^3\left\{-\frac{1}{x} - (-x^2)\right\}dx$

$\displaystyle = \Big[-\log x + \frac{1}{3}x^3\Big]_1^3$

$\displaystyle = -(\log 3 - 0) + \frac{1}{3}(27-1)$

$\displaystyle = -\log 3 + \frac{26}{3}$

(4) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^x (x+1)e^{2y}\,dy\right\}dx$

$\displaystyle = \int_0^1\Big[\frac{1}{2}(x+1)e^{2y}\Big]_{y=0}^{y=x}dx$

$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(x+1) & & \frac{1}{2}e^{2x} \\ \frac{1}{2} & & e^{2x} \end{array}$

$\displaystyle = \int_0^1\left\{\frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}(x+1)\cdot 1\right\}dx$

$\displaystyle = \left\{\Big[\frac{1}{4}(x+1)e^{2x}\Big]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x}dx\right\} - \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}x^2 + x\Big]_0^1$

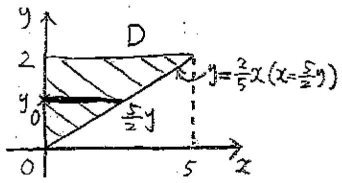
$\displaystyle = \frac{1}{4}(2\cdot e^2 - 1\cdot 1) - \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$

$\displaystyle = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(e^2-1) - \frac{3}{4}$

$\displaystyle = \frac{3e^2}{8} - \frac{7}{8}$

(5) $\displaystyle\int_0^5\left\{\int_{\frac{2}{5}x}^{2} y(y^3+1)^{-\frac{3}{2}}dy\right\}dx \quad \cdots (*)$

積分領域は



$D: 0 \leqq x \leqq 5,\ \frac{2}{5}x \leqq y \leqq 2$

であるが、これは

$D: 0 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq \frac{5}{2}y$

でもあるから

$\displaystyle (*) = \int_0^2\left\{\int_0^{\frac{5}{2}y} y(y^3+1)^{-\frac{3}{2}}dx\right\}dy$

$\displaystyle = \int_0^2\Big[xy(y^3+1)^{-\frac{3}{2}}\Big]_{x=0}^{x=\frac{5}{2}y}dy$

$\displaystyle = \int_0^2 \frac{5}{2}y^2(y^3+1)^{-\frac{3}{2}}dy$

$\displaystyle = \frac{5}{6}\int_0^2 (y^3+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3y^2\,dy$

$\displaystyle = \frac{5}{6}\Big[-2(y^3+1)^{-\frac{1}{2}}\Big]_0^2$

$\displaystyle = -\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)$

$\displaystyle = \frac{10}{9}$