

科目名	数学A	対象	li-2	学部 研究科	工学部第二部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 1 月 20 日 (火) 3 回目 (~ 時限目)			担当	石川 学		学年		氏名		
試験 時間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 予記のみ参照 持込可 ()							

2014 年度 I 科 2 組 後期試験

※解答用紙の裏面使用可

- 1 (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ. (1) は答のみでよい.

$$\frac{-2x^2 + 25x - 50}{(x+2)(x^2 - 6x + 11)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2 - 6x + 11}$$

(2) $\int \frac{-2x^2 + 25x - 50}{(x+2)(x^2 - 6x + 11)} dx$ を求めよ.

- 2 $\sqrt{4x^2 - x + 9} + 2x = t$ とおくことにより, $\int \frac{3}{x\sqrt{4x^2 - x + 9}} dx$ を求めよ.

- 3 $f(x, y) = -x^2y - y^3 + \frac{4}{3}x^2 + 3y^2 + 2xy - \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}y$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ. (1) は答のみでよい.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

※ $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする.

- 4 次の積分を求めよ.

(1) $\int_0^{\sqrt{3}} 4x^3 \arctan x dx$

(2) $\int_{-1}^2 \left\{ \int_{-3}^{x^2} (x+y) dy \right\} dx$

(3) $\int_1^7 \left(\int_1^x \log y dy \right) dx$

(4) $\int_0^5 \left\{ \int_{\frac{3}{5}x}^3 y(y^3 + 9)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx$ (順序変更)

(5) $\int \int_D (3y - 5) dx dy$ ($D : x \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$)

科目名		担当 先生		
理学部	1	氏 名	I-2	
工学部	2			

[1] (1) $\frac{-2x^2+25x-50}{(x+2)(x^2-6x+11)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+11}$ の分母をそろえて

$$-2x^2+25x-50 = A(x^2-6x+11) + (Bx+C)(x+2)$$

$$\cdot x = -2 \text{ を代入 } -108 = 27A \quad \therefore A = -4$$

$$\cdot x = 0 \text{ を代入 } -50 = 11A + 2C$$

$$-50 = -44 + 2C \quad \therefore C = -3$$

$$\cdot x = 1 \text{ を代入 } -27 = 6A + 3(B+C)$$

$$-27 = -24 + 3(B-3) \quad \therefore B = 2$$

$$\therefore A = -4, B = 2, C = -3$$

$$(2) \int \frac{-2x^2+25x-50}{(x+2)(x^2-6x+11)} dx$$

$$= \int \left(-\frac{4}{x+2} + \frac{2x-3}{x^2-6x+11} \right) dx$$

$$= \int \left\{ -\frac{4}{x+2} + \frac{(2x-6)+3}{x^2-6x+11} \right\} dx$$

$$= \int \left\{ -\frac{4}{x+2} + \frac{2x-6}{x^2-6x+11} + \frac{3}{(\sqrt{2})^2+(x-3)^2} \right\} dx$$

$$= -4 \log|x+2| + \log(x^2-6x+11) + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-3}{\sqrt{2}}$$

[2] $\sqrt{4x^2-x+9} + 2x = t$ とおくと $\sqrt{4x^2-x+9} = t-2x$
両辺2乗して

$$4x^2-x+9 = t^2-4tx+4x^2$$

$$(4t-1)x = t^2-9$$

$$\therefore x = \frac{t^2-9}{4t-1}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (4t-1) - (t^2-9) \cdot 4}{(4t-1)^2} = \frac{2(2t^2-t+18)}{(4t-1)^2}$$

さらに

$$\sqrt{4x^2-x+9} = t-2x = t - \frac{2(t^2-9)}{4t-1} = \frac{2t^2-t+18}{4t-1}$$

よって

$$\int \frac{3}{x\sqrt{4x^2-x+9}} dx = \int \frac{3}{\frac{t^2-9}{4t-1} \cdot \frac{2t^2-t+18}{4t-1}} \cdot \frac{2(2t^2-t+18)}{(4t-1)^2} dt$$

$$= \int \frac{6}{t^2-9} dt$$

$$= \int \frac{6}{(t-3)(t+3)} dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3} \right) dt$$

$$= \log|t-3| - \log|t+3|$$

[3] $f(x,y) = -x^2y - y^3 + \frac{4}{3}x^2 + 3y^2 + 2xy - \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}y$

$$(1) \begin{cases} f_x(x,y) = -2xy + \frac{8}{3}x + 2y - \frac{8}{3} = 0 & \dots ① \\ f_y(x,y) = -x^2 - 3y^2 + 6y + 2x - \frac{8}{3} = 0 & \dots ② \end{cases}$$

①より

$$-2x(y - \frac{4}{3}) + 2(y - \frac{4}{3}) = 0$$

$$-2(x-1)(y - \frac{4}{3}) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ または } y = \frac{4}{3}$$

(i) $x = 1$ のとき, ②より

$$-1 - 3y^2 + 6y + 2 - \frac{8}{3} = 0$$

$$-3y^2 + 6y - \frac{5}{3} = 0$$

$$9y^2 - 18y + 5 = 0$$

$$(3y-1)(3y-5) = 0 \quad \therefore y = \frac{1}{3}, \frac{5}{3}$$

(ii) $y = \frac{4}{3}$ のとき, ②より

$$-x^2 - \frac{16}{3} + 8 + 2x - \frac{8}{3} = 0$$

$$-x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0, 2$$

以上(i), (ii)より, 停留点は

$$(1, \frac{1}{3}), (1, \frac{5}{3}), (0, \frac{4}{3}), (2, \frac{4}{3})$$

$$(2) f_{xx}(x,y) = -2y + \frac{8}{3}, f_{yy}(x,y) = -6y + 6, f_{xy}(x,y) = -2x + 2$$

$$H(x,y) = (-2y + \frac{8}{3})(-6y + 6) - (-2x + 2)^2$$

$$\cdot H(1, \frac{1}{3}) = 2 \cdot 4 - 0^2 = 8 > 0, f_{xx}(1, \frac{1}{3}) = 2 > 0$$

$$\therefore f(1, \frac{1}{3}) = -\frac{43}{27} : \text{極小値}$$

$$\cdot H(1, \frac{5}{3}) = (-\frac{2}{3}) \cdot (-4) - 0^2 = \frac{8}{3} > 0, f_{xx}(1, \frac{5}{3}) = -\frac{2}{3} < 0$$

$$\therefore f(1, \frac{5}{3}) = -\frac{11}{27} : \text{極大値}$$

$$\cdot H(0, \frac{4}{3}) = 0 \cdot (-2) - 2^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(0, \frac{4}{3}) : \text{極値ではない}$$

$$\cdot H(2, \frac{4}{3}) = 0 \cdot (-2) - (-2)^2 = -4 < 0$$

$$\therefore f(2, \frac{4}{3}) : \text{極値ではない}$$

4

$$(1) \int_0^{\sqrt{3}} 4x^3 \arctan x dx$$

$$\arctan x \begin{cases} x^2-1 \\ \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$$= [(x^4-1) \arctan x]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} (x^2-1) dx$$

$$= \{8 \cdot \frac{\pi}{3} - (-1) \cdot 0\} - [\frac{1}{3}x^3 - x]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8}{3}\pi - (\sqrt{3} - \sqrt{3})$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

$$(2) \int_{-1}^2 \left\{ \int_{-3}^{x^2} (x+y) dy \right\} dx$$

$$= \int_{-1}^2 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=-3}^{y=x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^2 \left\{ (x^3 + \frac{1}{2}x^4) - (-3x + \frac{9}{2}) \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{4}(16-1) + \frac{1}{10}\{32-(-1)\} + \frac{3}{2}(4-1) - \frac{9}{2}\{2-(-1)\}$$

$$= -\frac{39}{20}$$

$$(3) \int_1^7 \left(\int_1^x \log y dy \right) dx$$

$$= \int_1^7 [y \log y - y]_{y=1}^{y=x} dx$$

$$= \int_1^7 \{ (x \log x - 1 \cdot 0) - (x-1) \} dx$$

$$= \left(\left[\frac{1}{2}x^2 \log x \right]_1^7 - \frac{1}{2} \int_1^7 x dx \right) - \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 \right]_1^7$$

$$= \frac{1}{2}(49 \log 7 - 1 \cdot 0) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^7 - \frac{1}{2}(36-0)$$

$$= \frac{49}{2} \log 7 - \frac{1}{4}(49-1) - 18$$

$$= \frac{49}{2} \log 7 - 30$$

$$(4) \int_0^5 \left\{ \int_{\frac{3}{5}x}^3 y(y^3+9)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} dx \dots (*)$$

積分領域は

$$D: 0 \leq x \leq 5, \frac{3}{5}x \leq y \leq 3$$

であるから、これは

$$D: 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq \frac{5}{3}y$$

であるから

$$(*) = \int_0^3 \left\{ \int_0^{\frac{5}{3}y} y(y^3+9)^{-\frac{3}{2}} dx \right\} dy$$

$$= \int_0^3 \left[xy(y^3+9)^{-\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=\frac{5}{3}y} dy$$

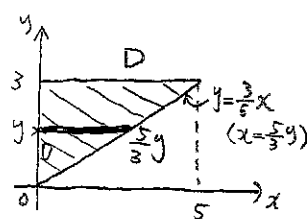
$$= \int_0^3 \frac{5}{3}y^2(y^3+9)^{-\frac{3}{2}} dy$$

$$= \frac{5}{9} \int_0^3 (y^3+9)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3y^2 dy$$

$$= \frac{5}{9} \left[-2(y^3+9)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^3$$

$$= -\frac{10}{9} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{5}{27}$$



$$(5) \begin{cases} x = r \cos \theta & (r \geq 0) \\ y = r \sin \theta & (\theta: 1 \text{ 周分}) \end{cases} \quad \text{と } 0 < \theta < 2\pi$$

$$\iint_D (3y-5) dx dy \quad (D: x \leq x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0)$$

$$= \iint_{D'} (3r \sin \theta - 5) \cdot r dr d\theta$$

$$(D': 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos \theta \leq r \leq 1)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{\cos \theta}^1 (3r^2 \sin \theta - 5r) dr \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[r^3 \sin \theta - \frac{5}{2}r^2 \right]_{r=\cos \theta}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ (1 - \cos^3 \theta) \sin \theta - \frac{5}{2}(1 - \cos^2 \theta) \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin \theta + \cos^3 \theta \cdot (-\sin \theta) - \frac{5}{2} \sin^2 \theta \right\} d\theta$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{4} \cos^4 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(0-1) - \frac{5}{8}\pi$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{5}{8}\pi$$

