科目名	数学A	対象	1i-2	学部研究科	工学部第二部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 28 年 1 月 19 日 (火) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川　学	学年		氏名		
試験時間	60 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

2015 年度 I 科 2 組　後期試験

※解答用紙の裏面使用可

1　(1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ．(1) は答のみでよい．

$$\frac{-x^2+41x-192}{(x+4)(x^2-14x+52)}=\frac{A}{x+4}+\frac{Bx+C}{x^2-14x+52}$$

(2) $\displaystyle\int\frac{-x^2+41x-192}{(x+4)(x^2-14x+52)}dx$ を求めよ．

2　$\sqrt{9x^2-5x+4}+3x=t$ とおくことにより，$\displaystyle\int\frac{2}{x\sqrt{9x^2-5x+4}}dx$ を求めよ．

3　$f(x,y)=x^3+xy^2-3x^2-\dfrac{4}{3}y^2-2xy+\dfrac{8}{3}x+\dfrac{8}{3}y$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．(1) は答のみでよい．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 \implies f(a,b)$：極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極大値
$H(a,b)<0 \implies f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする．

4　次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}}4x^3\arctan x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{-3}^{x^2}(2x+y)dy\right\}dx$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3}\left(\int_{x^2}^{x^3}\frac{x}{y}dy\right)dx$　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{7}\left\{\int_{\frac{2}{7}x}^{2}y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}dy\right\}dx$　(順序変更)

(5) $\displaystyle\iint_D(7y-5)dxdy$　　$(D: x\leqq x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0)$

東京理科大学　　　年　月　日　**試験答案**　　　評点

科目名		担当	先生
所属 学籍番号	学部　学科　番	氏名	I-2

1

(1) $\dfrac{-x^2+41x-192}{(x+4)(x^2-14x+52)} = \dfrac{A}{x+4} + \dfrac{Bx+C}{x^2-14x+52}$

の分母をはらうと

$-x^2+41x-192 = A(x^2-14x+52)+(Bx+C)(x+4)$

・$x=-4$ 代入　$-372 = 124A$　$\therefore A=-3$

・$x=0$ 代入　$-192 = 52A+4C$

$-192 = -156+4C$　$\therefore C=-9$

・$x=1$ 代入　$-152 = 39A+5(B+C)$

$-152 = -117+5(B-9)$　$\therefore B=2$

よって $A=-3$, $B=2$, $C=-9$

(2) (1)の結果より

$\displaystyle\int \frac{-x^2+41x-192}{(x+4)(x^2-14x+52)}dx$

$\displaystyle= \int \left(-\frac{3}{x+4}+\frac{2x-9}{x^2-14x+52}\right)dx$

$\displaystyle= \int \left\{-\frac{3}{x+4}+\frac{(2x-14)+5}{x^2-14x+52}\right\}dx$

$\displaystyle= \int \left\{-\frac{3}{x+4}+\frac{2x-14}{x^2-14x+52}+\frac{5}{(\sqrt{3})^2+(x-7)^2}\right\}dx$

$\displaystyle= -3\log|x+4| + \log(x^2-14x+52) + \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-7}{\sqrt{3}}$

2

$\sqrt{9x^2-5x+4}+3x=t$ とおくと $\sqrt{9x^2-5x+4}=t-3x$

両辺2乗して

$9x^2-5x+4 = t^2-6tx+9x^2$　$\therefore x=\dfrac{t^2-4}{6t-5}$

また

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t\cdot(6t-5)-(t^2-4)\cdot 6}{(6t-5)^2} = \dfrac{2(3t^2-5t+12)}{(6t-5)^2}$

さらに

$\sqrt{9x^2-5x+4} = t-3x = t-3\cdot\dfrac{t^2-4}{6t-5} = \dfrac{3t^2-5t+12}{6t-5}$

よって

$\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{9x^2-5x+4}}dx$

$\displaystyle= \int \frac{2}{\frac{t^2-4}{6t-5}\cdot\frac{3t^2-5t+12}{6t-5}}\cdot\frac{2(3t^2-5t+12)}{(6t-5)^2}dt$

$\displaystyle= \int \frac{4}{t^2-4}dt$

$\displaystyle= \int \frac{4}{(t-2)(t+2)}dt$

$\displaystyle= \int \left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt$

$= \log|t-2| - \log|t+2|$

3

$f(x,y) = x^3+xy^2-3x^2-\frac{4}{3}y^2-2xy+\frac{8}{3}x+\frac{8}{3}y$

(1) $\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2+y^2-6x-2y+\frac{8}{3}=0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = 2xy-\frac{8}{3}y-2x+\frac{8}{3}=0 & \cdots ② \end{cases}$

②より　$2y(x-\frac{4}{3})-2(x-\frac{4}{3})=0$

$2(x-\frac{4}{3})(y-1)=0$

$\therefore x=\frac{4}{3}$ または $y=1$

(i) $x=\frac{4}{3}$ のとき，①より

$\frac{16}{3}+y^2-8-2y+\frac{8}{3}=0$

$y(y-2)=0$

$\therefore y=0, 2$

(ii) $y=1$ のとき，①より

$3x^2+1-6x-2+\frac{8}{3}=0$

$9x^2-18x+5=0$

$(3x-1)(3x-5)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}, \frac{5}{3}$

以上(i),(ii)より，停留点は

$(\frac{4}{3},0), (\frac{4}{3},2), (\frac{1}{3},1), (\frac{5}{3},1)$

(2) $f_{xx}(x,y)=6x-6$, $f_{yy}(x,y)=2x-\frac{8}{3}$, $f_{xy}(x,y)=2y-2$

$H(x,y) = (6x-6)(2x-\frac{8}{3})-(2y-2)^2$

・$H(\frac{4}{3},0) = 2\cdot 0-(-2)^2=-4<0$

$\therefore f(\frac{4}{3},0)$：極値でない

・$H(\frac{4}{3},2) = 2\cdot 0-2^2=-4<0$

$\therefore f(\frac{4}{3},2)$：極値でない

・$H(\frac{1}{3},1) = (-4)\cdot(-2)-0^2=8>0$, $f_{xx}(\frac{1}{3},1)=-4<0$

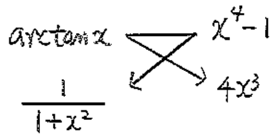
$\therefore f(\frac{1}{3},1)=\frac{43}{27}$：極大値

・$H(\frac{5}{3},1) = 4\cdot\frac{2}{3}-0^2=\frac{8}{3}>0$, $f_{xx}(\frac{5}{3},1)=4>0$

$\therefore f(\frac{5}{3},1)=\frac{11}{27}$：極小値

4

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} 4x^3 \arctan x\,dx$



$= \left[(x^4-1)\arctan x\right]_{-1}^{\sqrt{3}} - \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} (x^2-1)\,dx$

$= \left\{8\cdot\frac{\pi}{3} - 0\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} - \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{\sqrt{3}}$

$= \frac{8}{3}\pi - \left\{(\sqrt{3}-\sqrt{3}) - \left(-\frac{1}{3}+1\right)\right\}$

$= \frac{8}{3}\pi + \frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{-3}^{x^2}(2x+y)\,dy\right\}dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{2}\left[2xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=-3}^{y=x^2} dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\left(2x^3+\frac{1}{2}x^4\right) - \left(-6x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{2}\left(2x^3+\frac{1}{2}x^4+6x-\frac{9}{2}\right)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + 3x^2 - \frac{9}{2}x\right]_{-1}^{2}$

$= \left(8+\frac{16}{5}+12-9\right) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}+3+\frac{9}{2}\right)$

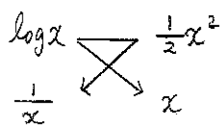
$= \frac{63}{10}$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3}\left(\int_{x^2}^{x^3}\frac{x}{y}\,dy\right)dx$

$= \displaystyle\int_{1}^{3}\left[x\log y\right]_{y=x^2}^{y=x^3} dx$

$= \displaystyle\int_{1}^{3} x(\log x^3 - \log x^2)\,dx$

$= \displaystyle\int_{1}^{3} x\log x\,dx$



$= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^3 - \frac{1}{2}\displaystyle\int_1^3 x\,dx$

$= \frac{1}{2}(9\log 3 - 1\cdot 0) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$

$= \frac{9}{2}\log 3 - \frac{1}{4}(9-1)$

$= \frac{9}{2}\log 3 - 2$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{7}\left\{\int_{\frac{2}{7}x}^{2} y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}dy\right\}dx \cdots (*)$

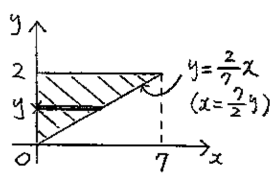
積分領域は

D: $0 \leqq x \leqq 7,\ \frac{2}{7}x \leqq y \leqq 2$

であるが，これは

D: $0 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq \frac{7}{2}y$

でもあるから



$(*) = \displaystyle\int_0^2\left\{\int_0^{\frac{7}{2}y} y^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}dx\right\}dy$

$= \displaystyle\int_0^2\left[xy^2(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=\frac{7}{2}y} dy$

$= \displaystyle\int_0^2 \frac{7}{2}y^3(y^4+9)^{-\frac{3}{2}}dy$

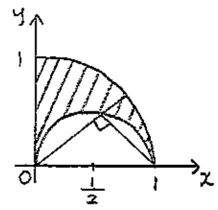
$= \frac{7}{8}\displaystyle\int_0^2 (y^4+9)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4y^3\,dy$

$= \frac{7}{8}\left[-2(y^4+9)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^2$

$= -\frac{7}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{7}{30}$

(5) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\begin{pmatrix} r \geqq 0 \\ \theta: 1周分 \end{pmatrix}$ とおくと



$\displaystyle\iint_D (7y-5)\,dxdy$ $(D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

$= \displaystyle\iint_{D'} (7r\sin\theta - 5)\cdot r\,drd\theta$ $(D': 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1)$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{\cos\theta}^{1}(7r^2\sin\theta - 5r)\,dr\right\}d\theta$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{7}{3}r^3\sin\theta - \frac{5}{2}r^2\right]_{r=\cos\theta}^{r=1} d\theta$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{7}{3}(1-\cos^3\theta)\sin\theta - \frac{5}{2}(1-\cos^2\theta)\right\}d\theta$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{7}{3}\{\sin\theta + \cos^3\theta\cdot(-\sin\theta)\} - \frac{5}{2}\sin^2\theta\right]d\theta$

公式

$= \left[\frac{7}{3}\left(-\cos\theta + \frac{1}{4}\cos^4\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{7}{3}\left\{-(0-1) + \frac{1}{4}(0-1)\right\} - \frac{5}{8}\pi$

$= \frac{7}{4} - \frac{5}{8}\pi$