数 1A2B 演習の問題を順次解説していきます．

質問等があったら，文章のみなら

`sieg-fc-7@ezweb.ne.jp`　　（ガラケー）

まで，写メなど添付ファイルがある場合は

`ishikawa-manabu@ishimana.sakura.ne.jp`　　（パソコン）

までお願いします．

6. 条件つき確率

事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる確率 $P_A(B)$ を

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}\left(=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\right)$$

で定める．これを A が起こったときの B の**条件つき確率**という．

※定義から $P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$ であるが，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ が成り立つとき，A と B は**独立**であるという.「試行の独立」と「事象の独立」を混同しないように．

【問題 3.5】

当たりくじが 5 本，はずれくじが 10 本，合計 15 本のくじが袋の中に入っている．この袋から順にくじを 1 本ずつ引く．このとき，はずれくじを引いた場合はくじを袋の中に戻すが，当たりくじを引いた場合はくじを袋の中に戻さないものとする．

(1) 1 本目が当たりである確率を求めなさい．また，1 本目と 2 本目がともに当たりである確率を求めなさい．

(2) 2 本目が当たりである確率を求めなさい．また，1 本目と 2 本目のうち少なくともどちらかが当たりである確率を求めなさい．

(3) 2 本目と 3 本目がともに当たりである確率を求めなさい．

(4) 2 本目が当たりであったとき，1 本目も当たりであった条件付き確率を求めなさい．また，2 本目が当たりであったとき，3 本目も当たりである条件付き確率を求めなさい．

（2017　長崎県立大）

解答

(1) 1 本目が当たりである確率は

$$\frac{5}{15}=\frac{1}{3}\quad\cdots\cdots①$$

また，1 本目と 2 本目がともに当たりである確率は

$$①\times\frac{4}{14}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{21}\quad\cdots\cdots②$$

(2) 1 本目がはずれで 2 本目が当たりである確率は

$$(1-①)\times\frac{5}{15}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\quad\cdots\cdots③$$

よって，2 本目が当たりである確率は

$$②+③=\frac{2}{21}+\frac{2}{9}=\frac{20}{63}\quad\cdots\cdots④$$

また，1 本目と 2 本目のうち少なくともどちらかが当たりである確率は

$$①+③=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

(3) 1 本目と 2 本目と 3 本目がすべて当たりである確率は

$$②\times\frac{3}{13}=\frac{2}{21}\times\frac{3}{13}=\frac{2}{91}\quad\cdots\cdots⑤$$

また，1 本目がはずれで 2 本目と 3 本目がともに当たりである確率は

$$③ \times \frac{4}{14} = \frac{2}{9} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{63} \quad \cdots\cdots ⑥$$

よって，2 本目と 3 本目がともに当たりである確率は

$$⑤ + ⑥ = \frac{2}{91} + \frac{4}{63} = \frac{10}{117} \quad \cdots\cdots ⑦$$

(4) 2 本目が当たりであったとき，1 本目も当たりであった条件付き確率は

$$\frac{②}{④} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{20}{63}} = \frac{3}{10}$$

また，2 本目が当たりであったとき，3 本目も当たりである条件付き確率は

$$\frac{⑦}{④} = \frac{\frac{10}{117}}{\frac{20}{63}} = \frac{7}{26}$$

5. 反復試行

ある試行を繰り返し行うことを**反復試行**という.

1 回の試行で事象 A が起こる確率が p であるとき，この試行を n 回繰り返す反復試行において，A がちょうど k 回起こる確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k} $$

である.

【問題 3.6】

赤玉 2 個と白玉 6 個が入った箱がある.

(1) この箱から玉を 3 個同時に取り出す．このとき，赤玉が 1 個，白玉が 2 個である確率を求めよ.

(2) この箱から玉を 1 個取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を 5 回行うとき，5 回目にちょうど 2 度目の赤玉を取り出す確率を求めよ.

(3) この箱から玉を 2 個同時に取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を 4 回行うとき，1 回だけ赤玉と白玉が 1 個ずつである確率を求めよ.

（2010　日本女子大）

解答

(1) 求める確率は

$$ \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3} = \frac{2 \cdot \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}}{\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{15}{28} $$

(2) 求める確率は，4 回後までに赤玉を 1 回，白玉を 3 回取り出し，5 回目に赤玉を取り出す確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{2}{8}\right)^1 \left(\frac{6}{8}\right)^3 \times \frac{2}{8} = \frac{27}{256} $$

(3) この箱から玉を 2 個同時に取り出すとき，赤玉と白玉を 1 個ずつ取り出す確率は

$$ \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2} = \frac{2 \cdot 6}{\dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1}} = \frac{3}{7} $$

この事象が 4 回中 1 回だけ起こる確率が求める確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{3}{7}\right)^1 \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{768}{2401} $$

__確率の最大値・最小値__

確率 P_n の増減を調べるときは，比 $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ と 1 の大小を考えるとよい．$P_n>0$ より

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}>1 \quad\Longleftrightarrow\quad P_{n+1}>P_n$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}<1 \quad\Longleftrightarrow\quad P_{n+1}<P_n$$

となるからである．

【問題 3.7】

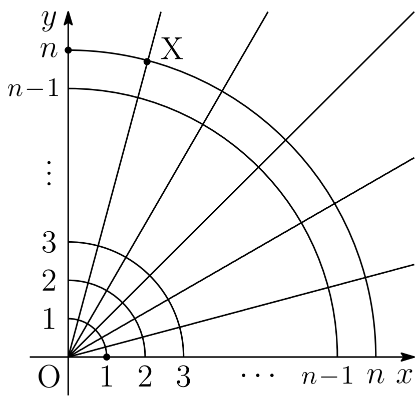
座標平面上の点 $(1,0)$ に物体 A がある．さいころを振り，1 から 4 の目が出たら原点から距離 1 だけ遠ざけ，5 または 6 の目が出たときには原点のまわりに 15 度時計方向と逆回りに回転させる．物体 A が y 軸に達するまでこれを続ける．次の問いに答えよ．

(1) 物体 A が点 $(0,n)$ $(n=1,2,3,\dots)$ に達する確率 P_n を求めよ．

(2) P_n を最大にする n を求めよ．

（2011　名古屋市立大）

解答



(1) y 軸に達するまで続けるということは，点 $(0,n)$ に達する前に y 軸上の点へ移動してはいけないから，点 $(0,n)$ へは点 $\mathrm{X}(n\cos 75^\circ, n\sin 75^\circ)$ から移動することになる．

よって，物体 A が点 $(0,n)$ に達するのは，1 から 4 の目が $n-1$ 回，5 または 6 の目が 5 回出て点 X へ移動して，次に 5 または 6 の目が出て点 $(0,n)$ へ達するときであるから，求める確率は

$$\begin{aligned} P_n &= {}_{n+4}\mathrm{C}_{n-1}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{6}\right)^5\times\frac{2}{6} \\ &= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\cdot2^{n-4}}{5\cdot3^{n+6}} \end{aligned}$$

(2) $$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)\cdot2^{n-3}}{5\cdot3^{n+7}}}{\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\cdot2^{n-4}}{5\cdot3^{n+6}}}=\frac{2(n+5)}{3n}$$

であるから

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}-1=\frac{2(n+5)}{3n}-1=\frac{10-n}{3n}$$

よって

$n=1,\ldots,9$ のとき $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}-1>0$ より $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1 \qquad \therefore \quad P_{n+1}>P_n$

$n=10$ のとき $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}-1=0$ より $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=1 \qquad \therefore \quad P_{n+1}=P_n$

$n=11,12,\ldots$ のとき $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}-1<0$ より $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}<1 \qquad \therefore \quad P_{n+1}<P_n$

これらから

$$P_1<P_2<\cdots<P_{10}=P_{11}>P_{12}>\cdots$$

となるから，P_n を最大にする n は

$$n=10,\ 11$$

【問題 3.8】
数直線上を動く点 P が，はじめ原点の位置にある．さいころを投げて，偶数の目が出れば P は正の向きに出た目の数だけ進み，奇数の目が出れば P は負の向きに出た目の数だけ進む．さいころを続けて 4 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 少なくとも 2 回は 2 の目が出て，最後に P の座標が 2 になる確率．

(2) 最後に P の座標が 2 になる確率．

（2010　信州大）

解答
奇数の目が奇数回出るときのみ，最後に P の座標が奇数になることに注意すると，最後に P の座標が 2 になるためには，奇数の目が偶数回出なければいけない．
奇数の目が 0 回出るとき，最後に P の座標は $2 \times 4 = 8$ 以上であり，奇数の目が 4 回出るとき，最後に P の座標は $(-1) \times 4 = -4$ 以下である．よって，奇数の目と偶数の目が 2 回ずつ出るときを考えればよい．このとき，最後に P の座標が 2 となるのは

$$（偶数の目の和）-（奇数の目の和）= 2$$

となるときであり，このような組は

$$(1, 1, 2, 2),\ (1, 3, 2, 4),\ (1, 5, 2, 6),\ (1, 5, 4, 4),\ (3, 3, 2, 6),\ (3, 3, 4, 4),\ (3, 5, 4, 6),\ (5, 5, 6, 6)$$

である．

(1) 少なくとも 2 回は 2 の目が出て，最後に P の座標が 2 になるのは，組が $(1, 1, 2, 2)$ のときである．出る順も考えると，求める確率は

$$\frac{4!}{2!2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{216}$$

(2) 最初に求めた組に対して出る順も考えると，求める確率は

$$\left(\frac{4!}{2!2!} \times 3 + \frac{4!}{2!} \times 2 + 4! \times 3\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{19}{216}$$

【問題 3.9】
数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える．

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する．

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする．

(1) $X(10)=0$ である確率を求めよ．

(2) $X(1)\neq 0,\ X(2)\neq 0,\dots,X(5)\neq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ．

(3) $X(1)\neq 0,\ X(2)\neq 0,\dots,X(9)\neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ．

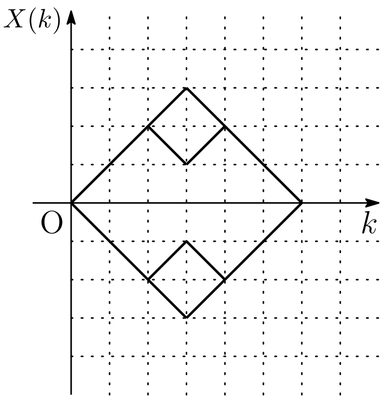
（2010　千葉大）

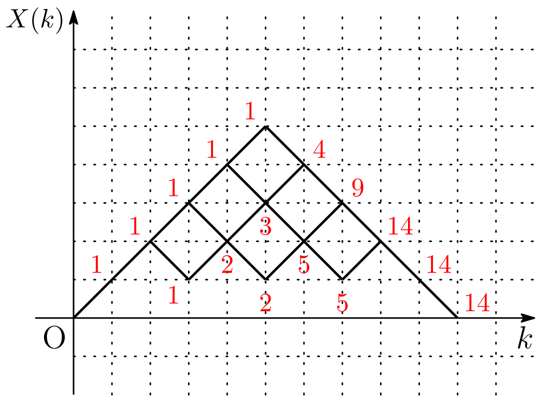
解答
(1) $X(10)=0$ となるのは，奇数の目と偶数の目が 5 回ずつ出るときであるから，求める確率は

$$ {}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{6}\right)^5\left(\frac{3}{6}\right)^5=\frac{63}{256} $$

(2) 数直線上で点の移動を追っていくのは分かりにくいので，k を横軸，$X(k)$ を縦軸にとり，回数と位置を追跡できるようにする．
$X(1)\neq 0,\ X(2)\neq 0,\dots,X(5)\neq 0,\ X(6)=0$ となるのは，下左図の太線部の経路の場合である．経路は 4 通りあるから，求める確率は

$$ 4\times\left(\frac{3}{6}\right)^6=\frac{1}{16} $$





(3) 最初に奇数の目が出て，$X(1)\neq 0,\ X(2)\neq 0,\dots,X(9)\neq 0,\ X(10)=0$ となるのは，上右図の太線部の経路の場合である．経路は書き込み式より 14 通りあり，最初に偶数の目が出る場合も同数であるから，求める確率は

$$ 2\times 14\times\left(\frac{3}{6}\right)^{10}=\frac{7}{256} $$