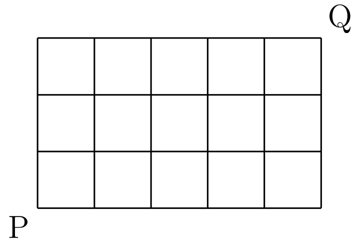
【問題 3.10】

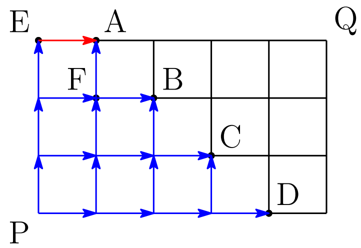
図のような縦と横すべて等間隔の道筋がある．太郎は P から Q へ最短距離を進み，花子は Q から P へ最短距離を進む．ただし，各分岐点での進む方向は，等確率で選ぶものとする．太郎と花子の速さは等しく，一定であるとき，太郎と花子の出会う確率を求めよ．



（1998　法政大）

解答

図のように地点 A, B, C, D, E, F を定めると，太郎と花子が出会うのは地点 A, B, C, D のいずれかである．



ここで，例えば太郎が進むとき，各分岐点で青矢印はそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で選ばれるが，地点 E では進む方向が 1 方向しかないため赤矢印は確率 1 で選ばれることに注意する．

太郎が地点 A を通るのは，P ⇒ E ⇒ A と P ⇒ F ⇒ A と進む場合があるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1 + {}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2^4}$$

太郎が地点 B を通る確率は

$${}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{2^4}$$

太郎が地点 C を通る確率は

$${}_4\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{2^4}$$

太郎が地点 D を通る確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}$$

また，花子が地点 A, B, C, D を通る確率は，対称性より，太郎が地点 D, C, B, A を通る確率とそれぞれ等しい．

以上より，太郎と花子が出会う確率は

$$\frac{5}{2^4} \times \frac{1}{2^4} + \frac{6}{2^4} \times \frac{4}{2^4} + \frac{4}{2^4} \times \frac{6}{2^4} + \frac{1}{2^4} \times \frac{5}{2^4} = \frac{29}{128}$$

【問題 3.11】

A と B の 2 人がじゃんけんをして，どちらかが 3 回勝つまで続けるというゲームをする．ただし，あいこも回数に含める．4 回目のじゃんけんで，A がゲームに勝つ確率は $\boxed{}$ である．また，5 回以下のじゃんけんで，ゲームが終わる確率は $\boxed{}$ である．

（2011　成蹊大）

解答

1 回のじゃんけんで A が勝つ，負ける，あいことなる確率はすべて $\dfrac{1}{3}$ ずつである．

(1) 4 回目のじゃんけんで A がゲームに勝つのは，3 回目までに A が 2 勝 1 敗か 2 勝 1 あいこで，4 回目に A が勝つときである．よって，求める確率は

$$\left\{{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\right\}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

(2) 3 回目のじゃんけんで A がゲームに勝つのは，最初から A が 3 連勝するときであるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

また，5 回目のじゃんけんで A がゲームに勝つのは，4 回目までに A が 2 勝 2 敗か 2 勝 2 あいこか 2 勝 1 敗 1 あいこで，5 回目に A が勝つときであるから，その確率は

$$\left\{{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\right\}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$$

B がゲームに勝つ場合も同じであるから，求める確率は

$$2\times\left(\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{8}{81}\right)=\frac{34}{81}$$

【問題 3.12】
A,B の 2 人を含む 7 人でジャンケンを一回行う．勝負がつかない確率は $\boxed{}$ である．また，A が勝ち，B が負ける確率は $\boxed{}$ である．

（2009　東京工科大）

解答

(1) 勝負がつくのは 2 つの手のみ出る場合で，2 つの手の選び方は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りある．
7 人がそれぞれ選んだ 2 つの手のどちらかを出すのは 2^7 通りあるが，このうち全員同じ手になる 2 通りはあいこである．
よって，勝負がつかない確率は

$$1-\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times(2^7-2)}{3^7}=1-\frac{14}{81}=\frac{67}{81}$$

(2) A が勝ちで B が負けるのは，B は A の出す手に負ける手を出し，残り 5 人は A か B と同じ手を出すときである．
よって，求める確率は

$$\frac{\overbrace{{}_3\mathrm{C}_1}^{\mathrm{A}}\times\overbrace{1}^{\mathrm{B}}\times\overbrace{2^5}^{\text{残り 5 人}}}{3^7}=\frac{32}{729}$$

【問題 3.13】

n を 2 以上の自然数とする．n 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 少なくとも 1 個は 1 の目が出る確率

(2) 出る目の最小値が 2 である確率

(3) 出る目の最小値が 2 かつ最大値が 5 である確率

（2007　滋賀大）

解答

(1) 少なくとも 1 個は 1 の目が出るのは，n 個とも 1 でない目が出ることの余事象であるから，求める確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2) 出る目の最小値が 2 であるのは，n 個とも 2 以上の目が出る場合から，2 の目が出ない（n 個とも 3 以上の目が出る）場合を除いたときである．よって，求める確率は

$$\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^n}_{n\text{ 個とも }2\sim6}-\underbrace{\left(\frac{4}{6}\right)^n}_{n\text{ 個とも }3\sim6}=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(3) 出る目の最小値が 2 かつ最大値が 5 であるのは，n 個とも 2 以上 5 以下の目が出る場合から

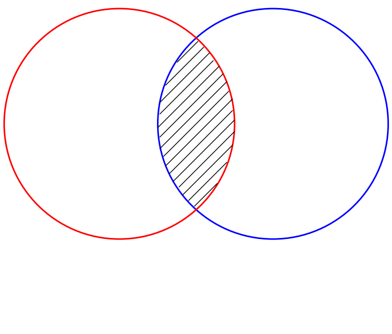
2 の目が出ない（n 個とも 3 以上 5 以下の目が出る）場合

と

5 の目が出ない（n 個とも 2 以上 4 以下の目が出る）場合

を除いたときである．よって，求める確率は

$$\underbrace{\left(\frac{4}{6}\right)^n}_{n\text{ 個とも }2\sim5}-\left\{\underbrace{\left(\frac{3}{6}\right)^n}_{n\text{ 個とも }3\sim5}+\underbrace{\left(\frac{3}{6}\right)^n}_{n\text{ 個とも }2\sim4}-\underbrace{\left(\frac{2}{6}\right)^n}_{n\text{ 個とも }3\sim4}\right\}=\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$



【問題 3.14】
ある囲碁大会で，5 つの地区から男女が各 1 人ずつ選抜されて，男性 5 人と女性 5 人のそれぞれが異性を相手とする対戦を 1 回行う．その対戦組み合わせを無作為な方法で決めるとき，同じ地区同士の対戦が含まれない組み合わせが起こる確率は $\boxed{}$ である．

（2010　早稲田大）

解答
$1, 2, 3, 4, 5$ の順列を考え，順列が k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 となった場合は

（地区 1 の男）対（地区 k_1 の女）

（地区 2 の男）対（地区 k_2 の女）

（地区 3 の男）対（地区 k_3 の女）

（地区 4 の男）対（地区 k_4 の女）

（地区 5 の男）対（地区 k_5 の女）

という対戦をすることにする．
このとき，同じ地区同士の対戦が含まれないのは，順列 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 が

$$k_1 \neq 1, \quad k_2 \neq 2, \quad k_3 \neq 3, \quad k_4 \neq 4, \quad k_5 \neq 5 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす場合である．
① を満たす順列の 1 番目は $2, 3, 4, 5$ のどれかになるが，どれでも同じであるから，1 番目が 2 である場合に適する順列をすべて書き出すと

$$2 — 1 \left\langle \begin{array}{l} 4 — 5 — 3 \\ 5 — 3 — 4 \end{array} \right. \qquad 2 — 3 \left\langle \begin{array}{l} 1 — 5 — 4 \\ 4 — 5 — 1 \\ 5 — 3 — 4 \end{array} \right.$$

$$2 — 4 \left\langle \begin{array}{l} 1 — 5 — 3 \\ 5 \left\langle \begin{array}{l} 1 — 3 \\ 3 — 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad 2 — 5 \left\langle \begin{array}{l} 1 — 3 — 4 \\ 4 \left\langle \begin{array}{l} 1 — 3 \\ 3 — 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

の 11 通りある．よって，求める確率は

$$\frac{4 \times 11}{5!} = \frac{11}{30}$$