3.　関数と方程式・不等式

§4.　2 次関数とその周辺

【問題 4.1】

(1) 不等式 $2x^2 + x - 6 > 0$　……① を解け.

(2) 不等式 $x^2 - (a+1)x + a < 0$　……② を定数 a の値により場合に分けて解け.

(3) ① と ② の不等式を同時に満たす整数値がただ 1 つであるように，実数 a の範囲を定めよ.

（2005　北里大）

解答

(1) ① を変形して　　$(x+2)(2x-3) > 0$

よって，① の解は　　$x < -2,\ \dfrac{3}{2} < x$

(2) ② を変形して　　$(x-a)(x-1) < 0$

よって，② の解は

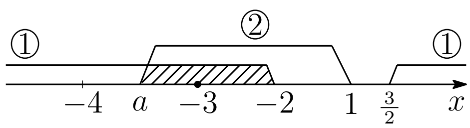
$$\begin{cases} a < 1 \text{ のとき} & a < x < 1 \\ a = 1 \text{ のとき} & \text{解なし} \\ a > 1 \text{ のとき} & 1 < x < a \end{cases}$$

(3) ① の解と ② の解の共通部分に整数がただ 1 つ含まれる a の範囲が求めるものである.

(i) $a < 1$ のとき

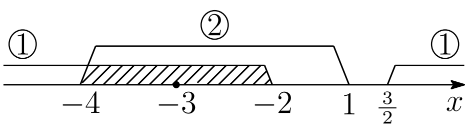
求める a の範囲は

$$-4 \leqq a < -3$$

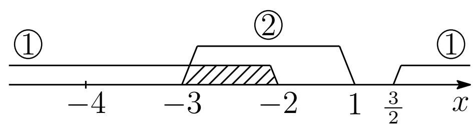


※等号のつけ方に疑問を持ったら…

$a = -4$ のとき



$a = -3$ のとき



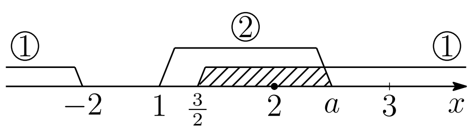
(ii) $a = 1$ のとき

② が解なしであるから不適.

(iii) $a > 1$ のとき

求める a の範囲は

$$2 < a \leqq 3$$



以上 (i) 〜 (iii) より，求める a の範囲は

$$-4 \leqq a < -3,\ 2 < a \leqq 3$$

6. 2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解が α,β であるための必要十分条件は

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

が成り立つことである．このことから

$$\alpha+\beta=p,\quad \alpha\beta=q$$

を満たす α,β を 2 つの解とする 2 次方程式（の 1 つ）は $x^2-px+q=0$ であることがわかる．

証明

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解が α,β であるための必要十分条件は

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

すなわち

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$$

が x の恒等式となることであるから，係数比較して

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}\qquad\blacksquare$$

【問題 4.2】

2 次方程式 $x^2+5x+3=0$ の 2 つの解を α,β とする．

(1) $\alpha^2+4\alpha+\beta,\ \beta^2+4\beta+\alpha$ を 2 つの解とする 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 となるものは

$$x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}=0$$

である．

(2) はじめの 2 次方程式 $x^2+5x+3=0$ の 2 つの解が $\alpha^2+p\alpha+q,\ \beta^2+p\beta+q$ と表されるならば，

$$p=\boxed{},\ q=\boxed{}\quad \text{または}\quad p=\boxed{},\ q=\boxed{}$$

である．

（2005　上智大）

解答

$x^2+5x+3=0$ の解が α,β であるから

$$\alpha+\beta=-5,\quad \alpha\beta=3$$

(1) $\alpha^2+5\alpha+3=0$ であるから

$$\alpha^2+4\alpha+\beta=(-5\alpha-3)+4\alpha+\beta=-\alpha+\beta-3$$

同様に　$\beta^2+4\beta+\alpha=-\beta+\alpha-3$

よって，$-\alpha+\beta-3$ と $-\beta+\alpha-3$ を解とする 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 となるものを求めればよい．

$$(-\alpha+\beta-3)+(-\beta+\alpha-3)=-6$$

$$\begin{aligned}(-\alpha+\beta-3)(-\beta+\alpha-3)&=\{-3-(\alpha-\beta)\}\{-3+(\alpha-\beta)\}=9-(\alpha-\beta)^2\\&=9-\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=9-(25-12)=-4\end{aligned}$$

であるから，求める 2 次方程式は

$$x^2+6x-4=0$$

(2) $\alpha^2+5\alpha+3=0$ であるから

$$\alpha^2+p\alpha+q=(-5\alpha-3)+p\alpha+q=(p-5)\alpha+q-3$$

同様に　$\beta^2+p\beta+q=(p-5)\beta+q-3$

これらが $x^2+5x+3=0$ の解となるとき

(i) $\begin{cases}(p-5)\alpha+q-3=\alpha & \cdots\cdots① \\ (p-5)\beta+q-3=\beta & \cdots\cdots②\end{cases}$　または　(ii) $\begin{cases}(p-5)\alpha+q-3=\beta & \cdots\cdots③ \\ (p-5)\beta+q-3=\alpha & \cdots\cdots④\end{cases}$

である．

(i) のとき
① − ② より　$(p-5)(\alpha-\beta)=\alpha-\beta$
$\alpha\neq\beta$ より　$p-5=1$　　$\therefore\quad p=6$
① より　$\alpha+q-3=\alpha$　　$\therefore\quad q=3$

(ii) のとき
③ − ④ より　$(p-5)(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$
$\alpha\neq\beta$ より　$p-5=-1$　　$\therefore\quad p=4$
③ より　$-\alpha+q-3=\beta$　　$\therefore\quad q=(\alpha+\beta)+3=-5+3=-2$

以上 (i),(ii) より

$$(p,q)=(6,3),(4,-2)$$

7．2 次の対称式，基本対称式

$\alpha^2+\beta^2,\ \alpha^3+\beta^3,\ (\alpha-\beta)^2$ など，α と β を入れかえても値が変わらない式を（2 次の）**対称式**という．また，対称式の中でも特に $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ を（2 次の）**基本対称式**という．対称式は基本対称式で表せることが知られていて，次の 3 つはよく使う．

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
$\qquad\qquad\quad =(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

【問題 4.3】

2 次方程式 $x^2-3x+1=0$ の 2 つの解を α,β とし $t_n=\alpha^n+\beta^n$ $(n=1,2,3,\dots)$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) t_1,t_2 の値を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して $t_{n+2}=At_{n+1}+Bt_n$ が成り立つような定数 A,B の値を求めよ．

(3) t_7 の値を求めよ．

（2008　福井大）

解答

(1) $x^2-3x+1=0$ の解が α,β であるから

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=1$$

よって

$$t_1=\alpha+\beta=3$$

$$t_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2=7$$

(2) 自然数 n に対して

$$\begin{aligned} t_{n+2} &= \alpha^{n+2}+\beta^{n+2} \\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\beta \\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n) \\ &= 3t_{n+1}-t_n \end{aligned}$$

となるから　$A=3,\ B=-1$

(3) $t_1=3,\ t_2=7,\ t_{n+2}=3t_{n+1}-t_n\ (n\geqq 1)$ を用いて順に求めると

$$t_3=3t_2-t_1=21-3=18$$

$$t_4=3t_3-t_2=54-7=47$$

$$t_5=3t_4-t_3=141-18=123$$

$$t_6=3t_5-t_4=369-47=322$$

$$t_7=3t_6-t_5=966-123=843$$

8．3 次方程式の解と係数の関係
3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解が α,β,γ であるための必要十分条件は

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

が成り立つことである．このことから

$$\alpha+\beta+\gamma=p,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q,\quad \alpha\beta\gamma=r$$

を満たす α,β,γ を 3 つの解とする 3 次方程式（の 1 つ）は $x^3-px^2+qx-r=0$ であることがわかる．

証明
3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解が α,β,γ であるための必要十分条件は

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

すなわち

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

が x の恒等式となることであるから，係数比較して

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}\qquad \blacksquare$$

9．3 次の対称式，基本対称式
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ など，α,β,γ のどの 2 つを入れかえても値が変わらない式を（3 次の）**対称式**という．また，対称式の中でも特に $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ を（3 次の）**基本対称式**という．対称式は基本対称式で表せることが知られていて

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

はよく使う．また

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

は記憶に値する．

【問題 4.4】
3 次方程式 $x^3-2x^2+3x-4=0$ の 3 つの解を複素数の範囲で考え，それらを α,β,γ とする．このとき，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の値を求めよ．また，$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値を求めよ．

（2003　慶應義塾大）

解答
$x^3-2x^2+3x-4=0$ の解が α,β,γ であるから

$$\alpha+\beta+\gamma=2,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\quad \alpha\beta\gamma=4$$

よって

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=4-6=-2$$

また

$$\begin{cases} \alpha^3 = 2\alpha^2 - 3\alpha + 4 & \cdots\cdots① \\ \beta^3 = 2\beta^2 - 3\beta + 4 & \cdots\cdots② \\ \gamma^3 = 2\gamma^2 - 3\gamma + 4 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

であるから，① + ② + ③ より

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 3(\alpha + \beta + \gamma) + 12 = -4 - 6 + 12 = 2$$

さらに，(① × α) + (② × β) + (③ × γ) より

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 4(\alpha + \beta + \gamma) = 4 + 6 + 8 = 18$$

そして，(① × α^2) + (② × β^2) + (③ × γ^2) より

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = 2(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) - 3(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) + 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 36 - 6 - 8 = 22$$

対称式の扱い

x, y の対称式を扱うとき，$x+y=u,\ xy=v$ とおいて，u, v の式に直すことは有効である．そのとき，x, y のとり得る値の範囲を，t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の解の配置にいいかえることを忘れないようにする．

【問題 4.5】
実数 x, y は $4x^2+4y^2+7xy+x+y-1=0$ を満たしているとする．このとき $u=x+y$ および $v=xy$ のとり得る値の範囲を求めよう．

(1) u のとり得る値の範囲は $\boxed{}$ である．

(2) v を u で表すと，$v=\boxed{}$ であるから，v のとり得る値の範囲は $\boxed{}$ である．

（2006　東京理科大）

解答

(1) $x+y=u,\ xy=v$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の実数解であるから，判別式を考えて

$$u^2-4v \geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

また，条件式を u, v で表すと

$$4x^2+4y^2+7xy+x+y-1=0$$

$$4(x^2+y^2)+7xy+(x+y)-1=0$$

$$4\{(x+y)^2-2xy\}+7xy+(x+y)-1=0$$

$$4(u^2-2v)+7v+u-1=0$$

$$4u^2-v+u-1=0$$

$$\therefore \quad v=4u^2+u-1 \quad \cdots\cdots②$$

② を ① へ代入して

$$u^2-4(4u^2+u-1) \geqq 0$$

$$-15u^2-4u+4 \geqq 0$$

$$15u^2+4u-4 \leqq 0$$

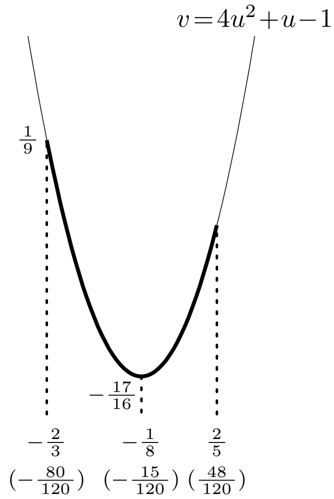
$$(3u+2)(5u-2) \leqq 0$$

$$\therefore \quad -\frac{2}{3} \leqq u \leqq \frac{2}{5}$$

(2) ② より

$$v = 4u^2 + u - 1 = 4\left(u + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{17}{16}$$

であるから，$-\dfrac{2}{3} \leqq u \leqq \dfrac{2}{5}$ におけるグラフは図の太線部となる．



よって，v のとり得る値の範囲は

$$-\frac{17}{16} \leqq v \leqq \frac{1}{9}$$

【問題 4.6】
実数 x, y が $x^3+y^3=3xy$ を満たすとき，$x+y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

（2011　岡山県立大）

解答

$x+y=u,\ xy=v$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の実数解であるから，判別式を考えて

$$u^2-4v \geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

また，条件式を u, v で表すと

$$x^3+y^3=3xy$$
$$(x+y)^3-3xy(x+y)=3xy$$
$$u^3-3uv=3v$$
$$\therefore \quad 3(u+1)v=u^3 \quad \cdots\cdots②$$

ここで，$u=-1$ のとき ② は $0\cdot v=-1$ となり，これをみたす v は存在しないから $u\neq -1$ としてよい．

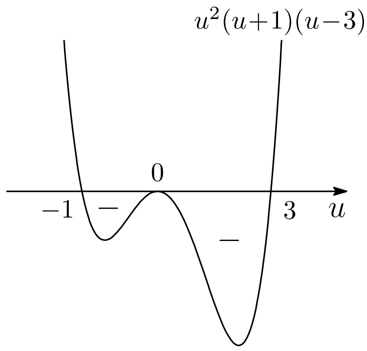
このとき，② より　$v=\dfrac{u^3}{3(u+1)}$

これを ① へ代入すると

$$u^2-4\cdot\frac{u^3}{3(u+1)} \geqq 0$$

両辺に $3(u+1)^2>0$ をかけると

$$3u^2(u+1)^2-4u^3(u+1) \geqq 0$$
$$u^2(u+1)\{3(u+1)-4u\} \geqq 0$$
$$u^2(u+1)(-u+3) \geqq 0$$
$$u^2(u+1)(u-3) \leqq 0$$



$u\neq -1$ より　$-1<u\leqq 3$

よって，$x+y$ のとり得る値の範囲は

$$-1<x+y\leqq 3$$

【類題】
x の 2 つの 2 次不等式：

$$2x^2-9x+4>0 \ \cdots ①,\quad x^2-(k+5)x+2k+6<0 \ \cdots ②$$

を同時にみたす自然数 x がただ 1 つであるとき，実数 k のとり得る値の範囲を求めよ．

（東京理科大）

【類題】

2 次方程式 $x^2-4x-2=0$ の解を α, β とする．$\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ と $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ を解とする 2 次方程式を $x^2+px+q=0$ とするとき，$p=\boxed{}$, $q=\boxed{}$ である．

（2011　立教大）

【類題】

2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，2 つの数 $\dfrac{4\alpha^2+5\alpha+6}{4\beta^2+5\beta+6}$, $\dfrac{4\beta^2+5\beta+6}{4\alpha^2+5\alpha+6}$ を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ．

（2010　富山大）

【類題】

2 次方程式 $x^2+x+2=0$ の 2 つの解を α, β とする．

(1) $\alpha^4+\beta^4=\boxed{}$, $\alpha^5+\beta^5=\boxed{}$ である．

(2) α^9 と β^9 を 2 つの解とする 2 次方程式のうち，x^2 の係数が 1 であるものは $\boxed{}$ である．

（2010　近畿大）

【類題】

$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=2,\ abc=3$ のとき，次の問に答えよ．

(1) $a^2+b^2+c^2$ の値を求めよ．

(2) a,b,c を 3 つの解とする 3 次方程式を作れ．

(3) $a^3+b^3+c^3$ の値を求めよ．

(4) $a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ．

（産業能率大）

【類題】

$a+b+c=2,\ ab+bc+ca=3,\ abc=2$ のとき，$a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3,\ a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ．

（2012　名古屋市立大・抜粋）

【類題】

実数 x, y について，$3x^2-2xy+3y^2=16$ が成り立つとする．

(1) $x+y=u,\ xy=v$ とおくと，$3x^2-2xy+3y^2=16$ は

$$v = \boxed{}\,u^2 + \boxed{} \qquad \cdots①$$

と表せる．また，t に関する 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ が実数解をもつので，u, v は $u^2-4v \geqq 0$ をみたす．この不等式に ① を代入して得られる 2 次不等式を解けば $\boxed{} \leqq u \leqq \boxed{}$ である．

(2) xy のとり得る値の範囲は，$\boxed{} \leqq xy \leqq \boxed{}$ である．

（2005　上智大）

【類題】
x と y は $x^2 - xy + y^2 = 9$ を満たす実数とする．このとき，$x^2 + y^2 + 2(x + y)$ の最大値と最小値，およびそのときの x, y の値を求めよ．

（2009　神戸学院大・設問形式変更）

【類題】
m を実数とする．x についての 2 次方程式 $x^2+(m-1)x+m^2+m-2=0$ が異なる実数解 α,β をもつとする．次の問いに答えよ．

(1) m の値の範囲を求めよ．

(2) $\alpha^2+\beta^2$ を m を用いて表せ．

(3) $\alpha^2+\beta^2$ がとり得る値の範囲を求めよ．

（2007　奈良女子大）

【類題】

x の 2 つの 2 次不等式：

$$2x^2-9x+4>0\ \cdots①,\quad x^2-(k+5)x+2k+6<0\ \cdots②$$

を同時にみたす自然数 x がただ 1 つであるとき，実数 k のとり得る値の範囲を求めよ．

（東京理科大）

解答

$2x^2-9x+4>0\ \cdots①$

$(2x-1)(x-4)>0$

よって，① の解は　$x<\dfrac{1}{2},\ 4<x$

$x^2-(k+5)x+2k+6<0\ \cdots②$

$x^2-(k+5)x+2(k+3)<0$

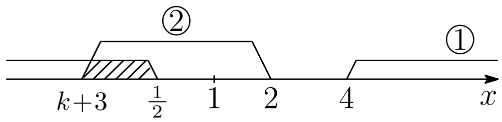
$(x-2)\{x-(k+3)\}<0$

よって，② の解は

$$\begin{cases} k+3<2 \quad \text{すなわち} \quad k<-1 \quad \text{のとき} \quad k+3<x<2 \\ k+3=2 \quad \text{すなわち} \quad k=-1 \quad \text{のとき} \quad \text{解なし} \\ k+3>2 \quad \text{すなわち} \quad k>-1 \quad \text{のとき} \quad 2<x<k+3 \end{cases}$$

(i) $k<-1$ のとき

① と ② を同時にみたす「自然数」x は存在しないから不適．

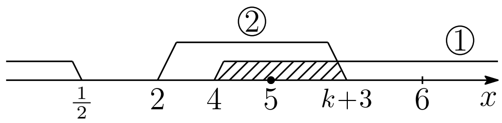


(ii) $k=-1$ のとき

② が解なしだから不適．

(iii) $k>-1$ のとき

① と ② を同時にみたす自然数 x がただ 1 つである条件は



$$5<k+3\leqq 6 \qquad \therefore\quad 2<k\leqq 3$$

以上 (i) ～ (iii) より，求める k のとり得る値の範囲は　　$2<k\leqq 3$

【類題】

2 次方程式 $x^2-4x-2=0$ の解を α, β とする．$\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ と $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ を解とする 2 次方程式を $x^2+px+q=0$ とするとき，$p=\boxed{}$, $q=\boxed{}$ である．

（2011　立教大）

解答

2 次方程式 $x^2-4x-2=0$ の解が α, β だから

$$\alpha+\beta=4, \quad \alpha\beta=-2$$

このとき

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{64+24}{-2}=-44$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha}=\alpha\beta=-2$$

だから，$\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ と $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2+44x-2=0 \qquad \therefore \quad p=44,\ q=-2$$

【類題】

2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，2 つの数 $\dfrac{4\alpha^2+5\alpha+6}{4\beta^2+5\beta+6}$, $\dfrac{4\beta^2+5\beta+6}{4\alpha^2+5\alpha+6}$ を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ.

（2010　富山大）

解答

2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の解が α, β だから

$$\alpha+\beta=-2, \quad \alpha\beta=3, \quad \alpha^2+2\alpha+3=0, \quad \beta^2+2\beta+3=0$$

このとき

$$4\alpha^2+5\alpha+6=4(-2\alpha-3)+5\alpha+6=-3\alpha-6=-3(\alpha+2)$$

同様に $4\beta^2+5\beta+6=-3(\beta+2)$

$$\therefore \quad \frac{4\alpha^2+5\alpha+6}{4\beta^2+5\beta+6}=\frac{-3(\alpha+2)}{-3(\beta+2)}=\frac{\alpha+2}{\beta+2}, \quad \frac{4\beta^2+5\beta+6}{4\alpha^2+5\alpha+6}=\frac{\beta+2}{\alpha+2}$$

よって，$\dfrac{\alpha+2}{\beta+2}$ と $\dfrac{\beta+2}{\alpha+2}$ を解とする 2 次方程式を求めればよい.

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha+2}{\beta+2}+\frac{\beta+2}{\alpha+2} &= \frac{(\alpha+2)^2+(\beta+2)^2}{(\alpha+2)(\beta+2)} \\
&= \frac{(\alpha^2+\beta^2)+4(\alpha+\beta)+8}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4} \\
&= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+8}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4} \\
&= \frac{4-6-8+8}{3-4+4} \\
&= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\frac{\alpha+2}{\beta+2}\cdot\frac{\beta+2}{\alpha+2}=1$$

だから，求める 2 次方程式の 1 つは

$$x^2+\frac{2}{3}x+1=0 \qquad \therefore \quad 3x^2+2x+3=0$$

【類題】

2 次方程式 $x^2+x+2=0$ の 2 つの解を α, β とする.

(1) $\alpha^4+\beta^4=\boxed{\qquad}$, $\alpha^5+\beta^5=\boxed{\qquad}$ である.

(2) α^9 と β^9 を 2 つの解とする 2 次方程式のうち，x^2 の係数が 1 であるものは $\boxed{\qquad}$ である.

（2010　近畿大）

解答

(1) 2 次方程式 $x^2+x+2=0$ の 2 つの解が α, β だから

$$\alpha+\beta=-1, \quad \alpha\beta=2$$

よって

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-4=-3$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-1+6=5$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=9-8=1$$

$$\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)=-15+4=-11$$

(2) $\alpha^9+\beta^9=(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^5+\beta^5)-(\alpha\beta)^4(\alpha+\beta)=-11+16=5$, $\alpha^9\beta^9=(\alpha\beta)^9=512$ だから，求める 2 次方程式は $x^2-5x+512=0$

※α, β は $x^2+x+2=0$ の解だから

$$\alpha^2=-\alpha-2 \ \cdots①, \quad \beta^2=-\beta-2 \ \cdots②$$

このとき，$(①\times\alpha^n)+(②\times\beta^n)$ より

$$\begin{array}{rrcrr}
 & \alpha^{n+2} & = & -\alpha^{n+1} & -2\alpha^n \\
+\ ) & \beta^{n+2} & = & -\beta^{n+1} & -2\alpha^n \\
\hline
 & \alpha^{n+2}+\beta^{n+2} & = & -(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}) & -2(\alpha^n+\beta^n)
\end{array}$$

よって

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-4=-3$$

$$\alpha^3+\beta^3=-(\alpha^2+\beta^2)-2(\alpha+\beta)=3+2=5$$

$$\alpha^4+\beta^4=-(\alpha^3+\beta^3)-2(\alpha^2+\beta^2)=-5+6=1$$

$$\alpha^5+\beta^5=-(\alpha^4+\beta^4)-2(\alpha^3+\beta^3)=-1-10=-11$$

$$\alpha^6+\beta^6=-(\alpha^5+\beta^5)-2(\alpha^4+\beta^4)=11-2=9$$

$$\alpha^7+\beta^7=-(\alpha^6+\beta^6)-2(\alpha^5+\beta^5)=-9+22=13$$

$$\alpha^8+\beta^8=-(\alpha^7+\beta^7)-2(\alpha^6+\beta^6)=-13-18=-31$$

$$\alpha^9+\beta^9=-(\alpha^8+\beta^8)-2(\alpha^7+\beta^7)=31-26=5$$

【類題】

$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=2,\ abc=3$ のとき，次の問に答えよ．

(1) $a^2+b^2+c^2$ の値を求めよ．

(2) a,b,c を 3 つの解とする 3 次方程式を作れ．

(3) $a^3+b^3+c^3$ の値を求めよ．

(4) $a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ．

（産業能率大）

解答

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1-4=-3$

(2) $a+b+c=1,\ ab+bc+ca=2,\ abc=3$ より，a,b,c を 3 つの解とする 3 次方程式は

$$x^3-x^2+2x-3=0$$

(3) (2) より

$$\begin{cases} a^3=a^2-2a+3 & \cdots\cdots① \\ b^3=b^2-2b+3 & \cdots\cdots② \\ c^3=c^2-2c+3 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

① + ② + ③ より

$$a^3+b^3+c^3=(a^2+b^2+c^2)-2(a+b+c)+9=-3-2+9=4$$

(4) $(① \times a)+(② \times b)+(③ \times c)$ より

$$a^4+b^4+c^4=(a^3+b^3+c^3)-2(a^2+b^2+c^2)+3(a+b+c)=4+6+3=13$$

$(① \times a^2)+(② \times b^2)+(③ \times c^2)$ より

$$a^5+b^5+c^5=(a^4+b^4+c^4)-2(a^3+b^3+c^3)+3(a^2+b^2+c^2)=13-8-9=-4$$

【類題】
$a+b+c=2,\ ab+bc+ca=3,\ abc=2$ のとき，$a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3,\ a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ．

（2012　名古屋市立大・抜粋）

解答
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=4-6=-2$

また，a,b,c は x の 3 次方程式 $x^3-2x^2+3x-2=0$ の解であるから

$$\begin{cases} a^3=2a^2-3a+2 & \cdots\cdots① \\ b^3=2b^2-3b+2 & \cdots\cdots② \\ c^3=2c^2-3c+2 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

① + ② + ③ より

$$a^3+b^3+c^3=2(a^2+b^2+c^2)-3(a+b+c)+6=-4-6+6=-4$$

$(① \times a)+(② \times b)+(③ \times c)$ より

$$a^4+b^4+c^4=2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)=-8+6+4=2$$

$(① \times a^2)+(② \times b^2)+(③ \times c^2)$ より

$$a^5+b^5+c^5=2(a^4+b^4+c^4)-3(a^3+b^3+c^3)+2(a^2+b^2+c^2)=4+12-4=12$$

※ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc=2\cdot(-2-3)+6=-4$

【類題】

実数 x, y について，$3x^2-2xy+3y^2=16$ が成り立つとする．

(1) $x+y=u,\ xy=v$ とおくと，$3x^2-2xy+3y^2=16$ は

$$v=\boxed{}\,u^2+\boxed{}\quad\cdots①$$

と表せる．また，t に関する 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ が実数解をもつので，u, v は $u^2-4v\geqq 0$ をみたす．この不等式に ① を代入して得られる 2 次不等式を解けば $\boxed{}\leqq u\leqq\boxed{}$ である．

(2) xy のとり得る値の範囲は，$\boxed{}\leqq xy\leqq\boxed{}$ である．

（2005　上智大）

解答

(1) $x+y=u,\ xy=v$ とおくと，$3x^2-2xy+3y^2=16$ は

$$3(x+y)^2-8xy=16$$

$$3u^2-8v=16 \qquad \therefore\quad v=\frac{3}{8}u^2-2\ \cdots①$$

また，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の実数解だから，判別式を考えると

$$u^2-4v\geqq 0\ \cdots②$$

① を ② へ代入すると

$$u^2-4\left(\frac{3}{8}u^2-2\right)\geqq 0$$

$$-\frac{u^2}{2}+8\geqq 0$$

$$u^2\leqq 16 \qquad \therefore\quad -4\leqq u\leqq 4$$

(2) $v=\dfrac{3}{8}u^2-2$ を $-4\leqq u\leqq 4$ の範囲で考えれば，v の範囲は $-2\leqq v\leqq 4$

よって，xy の範囲も $-2\leqq xy\leqq 4$

【類題】

x と y は $x^2-xy+y^2=9$ を満たす実数とする．このとき，$x^2+y^2+2(x+y)$ の最大値と最小値，およびそのときの x,y の値を求めよ．

（2009　神戸学院大・設問形式変更）

解答

$x+y=u,\ xy=v$ とおくと，x,y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0\ \cdots$① の実数解だから，判別式を考えると

$$u^2-4v \geqq 0\ \cdots②$$

また，条件式を u,v で表すと

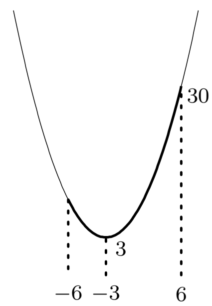
$$x^2-xy+y^2=9$$
$$(x+y)^2-3xy=9$$
$$u^2-3v=9 \qquad \therefore\quad v=\frac{u^2-9}{3}\ \cdots③$$

③ を ② へ代入すると

$$u^2-4\cdot\frac{u^2-9}{3}\geqq 0$$
$$u^2\leqq 36 \qquad \therefore\quad -6\leqq u\leqq 6$$

このとき

$$\begin{aligned}x^2+y^2+2(x+y) &= (x+y)^2-2xy+2(x+y)\\ &= u^2-2v+2u\\ &= u^2-2\cdot\frac{u^2-9}{3}+2u\\ &= \frac{1}{3}u^2+2u+6\\ &= \frac{1}{3}(u+3)^2+3\end{aligned}$$



だから

$$\begin{cases} u=6 \text{ のとき最大値 } 30\\ u=-3 \text{ のとき最小値 } 3\end{cases}$$

となる．ここで

$u=6$ のとき，① は $t^2-6t+9=0$ すなわち $(t-3)^2=0$ となるから，解は $t=3$ である．

$u=-3$ のとき，① は $t^2+3t=0$ すなわち $t(t+3)=0$ となるから，解は $t=0,-3$ である．

よって

$$\begin{cases} (x,y)=(3,3) \text{ のとき最大値 } 30\\ (x,y)=(0,-3),(-3,0) \text{ のとき最小値 } 3\end{cases}$$

【類題】

m を実数とする．x についての 2 次方程式 $x^2+(m-1)x+m^2+m-2=0$ が異なる実数解 α, β をもつとする．次の問いに答えよ．

(1) m の値の範囲を求めよ．

(2) $\alpha^2+\beta^2$ を m を用いて表せ．

(3) $\alpha^2+\beta^2$ がとり得る値の範囲を求めよ．

（2007　奈良女子大）

解答

(1) $x^2+(m-1)x+m^2+m-2=0$　……① が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，判別式を考えて

$$(m-1)^2-4(m^2+m-2)>0$$
$$3m^2+6m-9<0$$
$$3(m+3)(m-1)<0$$
$$\therefore \quad -3<m<1$$

(2) ① の解が α, β であるから

$$\alpha+\beta=-m+1, \quad \alpha\beta=m^2+m-2$$

よって

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= (-m+1)^2-2(m^2+m-2) \\ &= -m^2-4m+5 \\ &= -(m+2)^2+9\end{aligned}$$

(3) $\alpha^2+\beta^2=-(m+2)^2+9$ を $-3<m<1$ の範囲で考えれば，$\alpha^2+\beta^2$ のとり得る値の範囲は

$$0<\alpha^2+\beta^2 \leqq 9$$