3.　関数と方程式・不等式

§4.　2 次関数とその周辺

§4 は内容も軽いので，解答だけで済ませることにします．各自確認しておいてください．
質問等があったら，文章のみなら

sieg-fc-7@ezweb.ne.jp　　（ガラケー）

まで，写メなど添付ファイルがある場合は

ishikawa-manabu@ishimana.sakura.ne.jp　　（パソコン）

までお願いします．

【問題 4.1】
複素数 α が $\alpha^2+\alpha+2=0$ を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $(\alpha^3-2\alpha^2-1)(\alpha^4-2\alpha^3-5\alpha+5)=A\alpha+B$ を満たす実数 A, B の値を 1 組求めよ．

(2) $\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2-1}{\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1}=C\alpha+D$ を満たす実数 C, D の値を 1 組求めよ．

（2018　秋田大）

解答
α は虚数である．

(1) $\alpha^3-2\alpha^2-1=(\alpha^2+\alpha+2)(\alpha-3)+\alpha+5=\alpha+5$

$\alpha^4-2\alpha^3-5\alpha+5=(\alpha^2+\alpha+2)(\alpha^2-3\alpha+1)+3=3$

であるから

$$(\alpha^3-2\alpha^2-1)(\alpha^4-2\alpha^3-5\alpha+5)=(\alpha+5)\cdot 3=3\alpha+15$$

よって　　$A=3,\ B=15$

(2) $\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1=(\alpha^2+\alpha+2)(\alpha^3-\alpha)+\alpha-1=\alpha-1$

である．ここで

$$\alpha^2+\alpha+2=(\alpha-1)(\alpha+2)+4$$

より

$$(\alpha-1)(\alpha+2)+4=0 \qquad \therefore\ \frac{1}{\alpha-1}=-\frac{\alpha+2}{4}$$

よって

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha^3-2\alpha^2-1}{\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1} &= \frac{\alpha+5}{\alpha-1} \\
&= (\alpha+5)\cdot\frac{1}{\alpha-1} \\
&= (\alpha+5)\cdot\left(-\frac{\alpha+2}{4}\right) \\
&= \frac{-\alpha^2-7\alpha-10}{4} \\
&= \frac{-(\alpha^2+\alpha+2)-6\alpha-8}{4} \\
&= \frac{-6\alpha-8}{4} \\
&= -\frac{3}{2}\alpha-2
\end{aligned}
$$

したがって　　$C=-\dfrac{3}{2},\ D=-2$

※ $\dfrac{\alpha+5}{\alpha-1}=C\alpha+D$ より　　$\alpha+5=(\alpha-1)(C\alpha+D)$

右辺を展開して次数下げし，左辺と比較してもよい．

【問題 4.2】

a,b,c が次の 3 次方程式の解であるとする．

$$x^3-2x^2+x+5=0$$

(1) このとき，$a^3+b^3+c^3$ の値は $\boxed{}$ である．

(2) このとき，$a^4+b^4+c^4$ の値は $\boxed{}$ である．

（2009　東京理科大）

解答

a,b,c が $x^3-2x^2+x+5=0$ の解であるから

$$a+b+c=2,\quad ab+bc+ca=1,\quad abc=-5$$

よって

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=4-2=2$$

また

$$a^3=2a^2-a-5 \quad \cdots\cdots①$$

$$b^3=2b^2-b-5 \quad \cdots\cdots②$$

$$c^3=2c^2-c-5 \quad \cdots\cdots③$$

(1) ① + ② + ③ より

$$a^3+b^3+c^3=2(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)-15=4-2-15=-13$$

※ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc=2(2-1)-15=-13$

(2) $(①\times a)+(②\times b)+(③\times c)$ より

$$a^4+b^4+c^4=2(a^3+b^3+c^3)-(a^2+b^2+c^2)-5(a+b+c)=-26-2-10=-38$$

※
$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4 &= (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\ &= 4-2\{(ab+bc+ca)^2-2(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)\}\\ &= 4-2\{1-2abc(a+b+c)\}\\ &= 4-2(1+20)\\ &= -38\end{aligned}$$

【問題 4.3】

$\alpha=\left\{\left(\dfrac{413}{8}\right)^{\frac{1}{2}}+6\right\}^{\frac{1}{3}}-\left\{\left(\dfrac{413}{8}\right)^{\frac{1}{2}}-6\right\}^{\frac{1}{3}}$ は整数を係数とする 3 次方程式 $\boxed{}$ の解である．

（2011　上智大）

解答

$\left\{\left(\dfrac{413}{8}\right)^{\frac{1}{2}}+6\right\}^{\frac{1}{3}}=p,\quad \left\{\left(\dfrac{413}{8}\right)^{\frac{1}{2}}-6\right\}^{\frac{1}{3}}=q$ とおくと

$$\alpha=p-q \quad \cdots\cdots①$$

$$p^3=\left(\frac{413}{8}\right)^{\frac{1}{2}}+6 \quad \cdots\cdots②$$

$$q^3=\left(\frac{413}{8}\right)^{\frac{1}{2}}-6 \quad \cdots\cdots③$$

② − ③ より　　$p^3-q^3=12 \quad \cdots\cdots④$

② × ③ より　　$(pq)^3=\dfrac{413}{8}-36=\dfrac{125}{8}$

pq は実数であるから　　$pq=\dfrac{5}{2} \quad \cdots\cdots⑤$

① と ⑤ を ④ へ代入すると

$$p^3-q^3=12$$

$$(p-q)^3+3pq(p-q)=12$$

$$\alpha^3+\frac{15}{2}\alpha=12$$

$$\therefore \quad 2\alpha^3+15\alpha-24=0$$

よって，求める 3 次方程式は　　$2x^3+15x-24=0$

【問題 4.4】
整式 $P(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると余りが $5x+2$，$x-2$ で割ると余りが 3 となる．このとき，次の問 (1) ～ (3) に答えよ．

(1) $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割った余りを求めよ．

(2) $P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割った余りを求めよ．

(3) $P(x)$ が 5 次式で，$P(0)=-1$, $P(1)=-5$, $P(-2)=11$ を満たすものとする．このとき，$P(x)$ を求めよ．

（2011　立教大）

解答

(2) $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $5x+2$ であるから，$P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割った余りは $a(x+1)^2+5x+2$ とおける．商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x+1)^2(x-2)Q(x)+a(x+1)^2+5x+2 \quad \cdots\cdots ①$$

$P(x)$ を $x-2$ で割った余りが 3，すなわち，$P(2)=3$ より

$$9a+12=3 \qquad \therefore \quad a=-1$$

よって，求める余りは

$$-(x+1)^2+5x+2=-x^2+3x+1$$

※ $P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割った余りは ax^2+bx+c とおける．商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x+1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

ax^2+bx+c は $(x+1)^2=x^2+2x+1$ ではまだ割れるから

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x+1)^2(x-2)Q(x)+a(x^2+2x+1)+(b-2a)x+c-a \quad \cdots\cdots ② \\ &= (x+1)^2\{(x-2)Q(x)+a\}+(b-2a)x+c-a \end{aligned}$$

そして，$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $5x+2$ であるから

$$(b-2a)x+c-a=5x+2$$

これを ② へ戻した式が ① である．

※ $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $5x+2$ であるから，商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x)=(x+1)^2Q_1(x)+5x+2 \quad \cdots\cdots ③$$

$P(2)=3$ より

$$9Q_1(2)+12=3 \qquad \therefore \quad Q_1(2)=-1$$

よって，$Q_1(x)$ を $x-2$ で割った余りは -1 であるから，商を $Q_2(x)$ とすると

$$Q_1(x)=(x-2)Q_2(x)-1$$

これを ③ へ代入すると

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x+1)^2Q_1(x)+5x+2\\
&= (x+1)^2\{(x-2)Q_2(x)-1\}+5x+2\\
&= (x+1)^2(x-2)Q_2(x)-(x+1)^2+5x+2
\end{aligned}
$$

これから，求める余りが $-(x+1)^2+5x+2$ であることがわかる．

(1) (2) で求めた余り $-x^2+3x+1$ を $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ で割ると

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x+1)^2(x-2)Q(x)-x^2+3x+1\\
&= (x+1)^2(x-2)Q(x)-(x^2-x-2)+2x-1\\
&= (x+1)(x-2)\{(x+1)Q(x)-1\}+2x-1
\end{aligned}
$$

よって，求める余りは　　$2x-1$

(3) $P(x)$ が 5 次式ならば，(2) の結果より

$$P(x)=(x+1)^2(x-2)(px^2+qx+r)-x^2+3x+1 \quad (p\neq 0)$$

とおける．

$P(0)=-1$ より　　$-2r+1=-1$　　$\therefore\quad r=1$　$\cdots\cdots$④

$P(1)=-5$ より　　$-4(p+q+r)+3=-5$　　$\therefore\quad p+q+r=2$　$\cdots\cdots$⑤

$P(-2)=11$ より　　$-4(4p-2q+r)-9=11$　　$\therefore\quad 4p-2q+r=-5$　$\cdots\cdots$⑥

④ 〜 ⑥ より　　$p=-\dfrac{2}{3},\ q=\dfrac{5}{3},\ r=1$

よって

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x+1)^2(x-2)\left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x+1\right)-x^2+3x+1\\
&= (x^3-3x-2)\left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x+1\right)-x^2+3x+1\\
&= -\frac{2}{3}x^5+\frac{5}{3}x^4+3x^3-\frac{14}{3}x^2-\frac{10}{3}x-1
\end{aligned}
$$