§5.　図形と方程式

【問題 5.1】
連立不等式

$$\begin{cases} x+y-1 \geqq 0 \\ x-2y+5 \geqq 0 \\ x^2+y^2 \leqq 25 \end{cases}$$

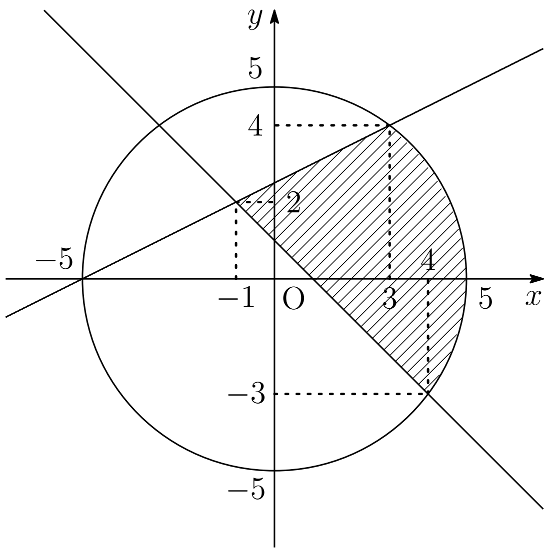
の表す領域を D とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 点 (x, y) が D 内を動くとき，$y-3x$ の最大値と最小値およびそのときの (x, y) を求めよ．

(3) 点 (x, y) が D 内を動くとき，$(x+2)^2+(y+1)^2$ の最大値と最小値およびそのときの (x, y) を求めよ．

解答
(1) D は図の斜線部（境界を含む）である．



(2) $y-3x=k$ とおき，直線

$$y=3x+k \quad \cdots\cdots①$$

と D が共有点をもつときの k の最大値，最小値が求めるものである．
ここで，直線 ① が点 $(-1, 2)$ を通るとき

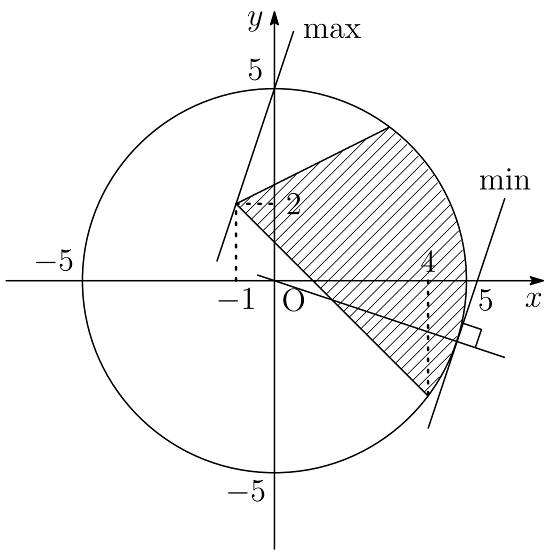
$$2=-3+k \qquad \therefore \quad k=5$$

また，直線 ① $(3x-y+k=0)$ と円

$$x^2+y^2=25 \quad \cdots\cdots②$$

が接するとき

$$\frac{|3\cdot 0-0+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=5$$



$$|k| = 5\sqrt{10}$$

$$\therefore \quad k = \pm 5\sqrt{10}$$

そして，$k = -5\sqrt{10}$ のとき，円 ② の中心 $(0, 0)$ を通り直線 ① $(y = 3x - 5\sqrt{10})$ に垂直な直線 $y = -\dfrac{1}{3}x$ と，直線 ① の交点 $\left(\dfrac{15}{\sqrt{10}}, -\dfrac{5}{\sqrt{10}}\right) \in D$ が，直線 ① と円 ② の接点である．

以上より

$$\begin{cases} (x, y) = (-1, 2) \text{ のとき最大値 } 5 \\ (x, y) = \left(\dfrac{15}{\sqrt{10}}, -\dfrac{5}{\sqrt{10}}\right) \text{ のとき最小値 } -5\sqrt{10} \end{cases}$$

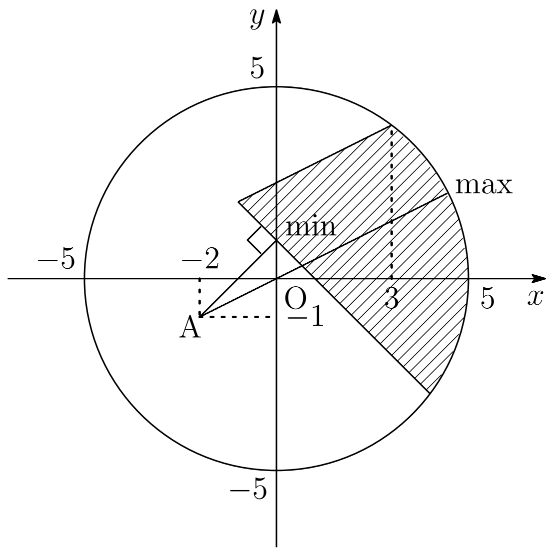
(3) $(x+2)^2+(y+1)^2$ は，2 点 $(-2, -1)$, (x, y) を結ぶ線分の長さの 2 乗であるから，点 $\mathrm{A}(-2, -1)$ と D の最長距離，最短距離それぞれの 2 乗が求めるものである．

ここで，A から最も遠い円 ② 上の点を B とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{5}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

より $\mathrm{B}(2\sqrt{5}, \sqrt{5}) \in D$ であり



$$\mathrm{AB}^2 = (2\sqrt{5}+2)^2 + (\sqrt{5}+1)^2 = 30 + 10\sqrt{5}$$

また，A を通り直線 $y = -x + 1$ ……③ に垂直な直線 $y = (x+2) - 1$ と，直線 ③ の交点は $\mathrm{H}(0, 1) \in D$ であり

$$\mathrm{AH}^2 = (0+2)^2 + (1+1)^2 = 8$$

以上より

$$\begin{cases} (x, y) = (2\sqrt{5}, \sqrt{5}) \text{ のとき最大値 } 30 + 10\sqrt{5} \\ (x, y) = (0, 1) \text{ のとき最小値 } 8 \end{cases}$$

【問題 5.2】
次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$x^2+y^2 \leqq 25, \quad (y-2x-10)(y+x+5) \leqq 0$$

(1) 領域 D を図示せよ．

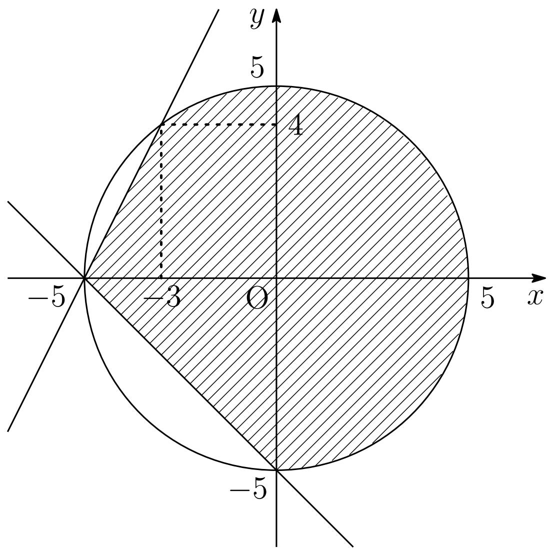
(2) 点 (x, y) がこの領域を動くとき，$x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．また，M, m を与える D の点を求めよ．

(3) a を実数とする．点 (x, y) が領域 D を動くとき，$ax+y$ が点 $(-3, 4)$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ．

（2010　北海道大）

解答

(1) D は図の斜線部（境界を含む）である．



(2) $x+2y=k$ とおき，直線

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

と D が共有点をもつときの k の最大値，最小値が求めるものである．

ここで，直線 ① $(x+2y-k=0)$ と円

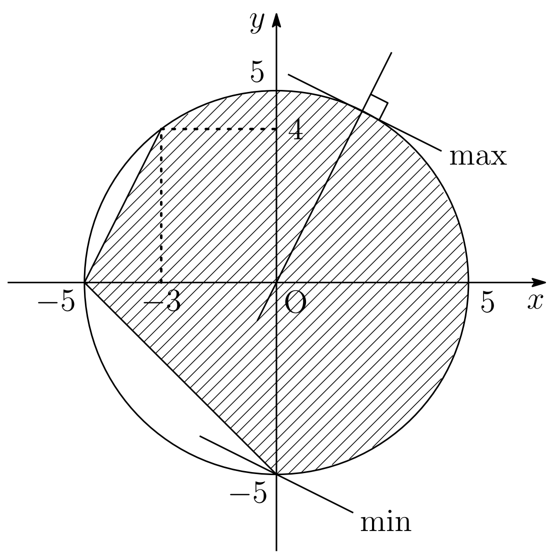
$$x^2+y^2=25 \quad \cdots\cdots ②$$

が接するとき

$$\frac{|0+2\cdot 0-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=5$$

$$|k|=5\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad k=\pm 5\sqrt{5}$$



そして，$k=5\sqrt{5}$ のとき，円 ② の中心 $(0, 0)$ を通り直線 ① $(x+2y-5\sqrt{5}=0)$ に垂直な直線 $y=2x$ と，直線 ① の交点 $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) \in D$ が，直線 ① と円 ② の接点である．

また，直線 ① が点 $(0, -5)$ を通るとき

$$-5 = -\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{k}{2} \qquad \therefore \quad k = -10$$

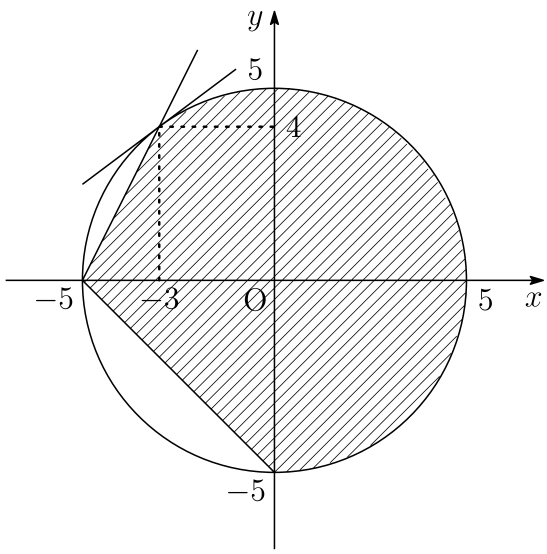
以上より

$$\begin{cases} (x,y) = (\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) \text{ のとき最大値 } 5\sqrt{5} \\ (x,y) = (0,-5) \text{ のとき最小値 } -10 \end{cases}$$

(3) $ax+y=k$ とおき，直線

$$y = -ax + k \quad \cdots\cdots③$$

と D が共有点をもつときの k の最大値が $ax+y$ の最大値である．よって，$ax+y$ が $(x,y)=(-3,4)$ で最大となる条件は，直線 ③ が点 $(-3,4)$ を通るとき，この直線より上側に D の点が存在しないことである．



ここで，点 $(-3,4)$ における円 ② の接線の方程式は

$$-3x+4y=25$$

であるから，傾きは　$\dfrac{3}{4}$

また，直線 $y=2x+10$ の傾きは　2

よって，求める a の範囲は

$$\frac{3}{4} \leqq -a \leqq 2$$

$$\therefore \quad -2 \leqq a \leqq -\frac{3}{4}$$

【類題】

連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 2x-1,\ y \geqq 0$ の表す領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x, y)$ がこの領域 D を動くとき，$x-2y$ の最小値は $\boxed{}$ である．また，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=2x-1$ の D 内の交点を Q とする．点 $\mathrm{P}(x, y)$ が領域 D を動くとき，点 Q で $x+my$ の値が最大となる実数 m の値の範囲は $\boxed{}$ である．

（2006　福岡大）

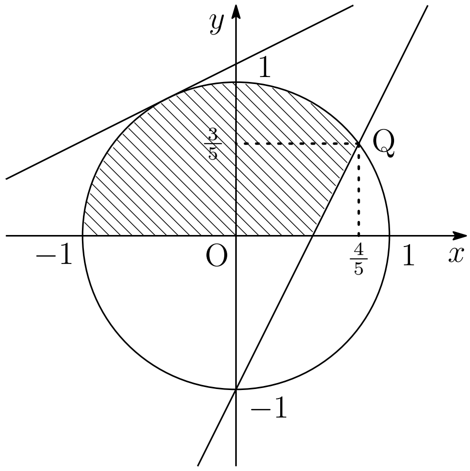
【類題】

連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 2x-1,\ y \geqq 0$ の表す領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,y)$ がこの領域 D を動くとき，$x-2y$ の最小値は $\boxed{}$ である．また，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=2x-1$ の D 内の交点を Q とする．点 $\mathrm{P}(x,y)$ が領域 D を動くとき，点 Q で $x+my$ の値が最大となる実数 m の値の範囲は $\boxed{}$ である．

（2006　福岡大）

解答

D は図の斜線部（境界を含む）になる．



（前半）

$x-2y=k$ とおき，直線 $x=2y+k$ ……① と D が共有点をもつときの k の最小値が求めるものである．

ここで，直線 ① $(x-2y-k=0)$ と円

$$x^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots ②$$

が接する条件は

$$\frac{|0-2\cdot 0-k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1$$

$$|k|=\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad k=\pm\sqrt{5}$$

$k=-\sqrt{5}$ のとき，① を変形すると

$$x-2y=-\sqrt{5} \qquad \therefore \quad -\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}=1$$

となるから，直線 ① と円 ② の接点は $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \in D$ である．

よって，求める最小値は　$-\sqrt{5}$

（後半）

$x+my=k$ とおき，直線 $x=-my+k$ ……③ と D が共有点をもつときの k の最大値が $x+my$ の最大値である．よって，$x+my$ が $(x,y)=\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ で最大となる条件は，直線 ③ が Q を通るとき，この直線より右側に D の点が存在しないことである．

ここで，直線 $y=2x-1$ は $x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}$ とかけ，

Q における円 ② の接線の方程式は

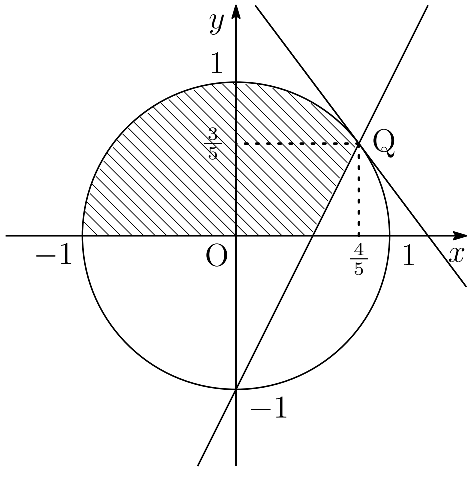
$$\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=1$$

$$\therefore \quad x=-\frac{3}{4}y+\frac{5}{4}$$

とかける．よって，求める m の範囲は

$$-\frac{3}{4} \leqq -m \leqq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2} \leqq m \leqq \frac{3}{4}$$



【問題 5.3】
k を実数とする．2 直線

$$l_1 : (k+1)x - 2ky + 3k + 4 = 0, \quad l_2 : 4kx + 2(k+1)y + 3k - 5 = 0$$

がある．

(1) k の値にかかわらず，直線 l_1 は定点 A を通り，直線 l_2 は定点 B を通る．2 点 A,B の座標をそれぞれ求めよ．

(2) k が変化するとき，2 直線 l_1, l_2 の交点の軌跡を求めよ．

（2009　静岡文化芸術大）

解答
(1) l_1 の方程式を k について整理すると

$$k(x - 2y + 3) + (x + 4) = 0$$

となるから，これが k の恒等式となる条件は

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 & \cdots\cdots① \\ x + 4 = 0 & \cdots\cdots② \end{cases} \qquad \therefore \quad x = -4,\ y = -\frac{1}{2}$$

よって　$\mathrm{A}\left(-4, -\dfrac{1}{2}\right)$

また，l_2 の方程式を k について整理すると

$$k(4x + 2y + 3) + (2y - 5) = 0$$

となるから，これが k の恒等式となる条件は

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3 = 0 & \cdots\cdots③ \\ 2y - 5 = 0 & \cdots\cdots④ \end{cases} \qquad \therefore \quad x = -2,\ y = \frac{5}{2}$$

よって　$\mathrm{B}\left(-2, \dfrac{5}{2}\right)$

(2) k が実数全体を動くとき，l_1 は 2 直線 ①, ② の交点 A を通る直線のうち，直線 ① 以外の直線をすべて表せ，l_2 は 2 直線 ③, ④ の交点 B を通る直線のうち，直線 ③ 以外の直線をすべて表せる．また，l_1, l_2 の法線ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} k+1 \\ -2k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4k \\ 2(k+1) \end{pmatrix}$ で

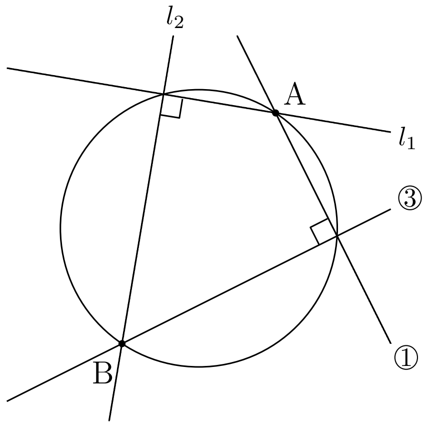
$$\begin{pmatrix} k+1 \\ -2k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4k \\ 2(k+1) \end{pmatrix} = 4k(k+1) - 4k(k+1) = 0$$

であるから，$l_1 \perp l_2$ である．

よって，l_1 と l_2 の交点の軌跡は A, B を直径の両端とする円のうち，2 直線 ①, ③ の交点 $\left(-\dfrac{6}{5}, \dfrac{9}{10}\right)$ を除いたものになる．
ここで，線分 AB の中点は $(-3, 1)$，長さは $\sqrt{13}$ である．
以上より，l_1 と l_2 の交点の軌跡は，円

$$(x+3)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}$$

から点 $\left(-\dfrac{6}{5}, \dfrac{9}{10}\right)$ を除いたものである．



※解答では問題の意図に合わせてみたが，パラメータ k の存在条件（k の消去）で解いてもよい．

l_1, l_2 の方程式を k について整理すると，それぞれ

$$k(x-2y+3)+(x+4)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$k(4x+2y+3)+(2y-5)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

となるから，① と ② を同時に満たす実数 k が存在するような x, y の条件が求めるものである．

(i) $x-2y+3=0 \quad \cdots\cdots ③$ のとき，① は $k\cdot 0+(x+4)=0$ となるから，これを満たす実数 k が存在する条件は　$x+4=0 \quad \cdots\cdots ④$

そして，③ かつ ④ を満たす x, y は $(x, y)=\left(-4, -\dfrac{1}{2}\right)$

これを ② へ代入すると

$$k(-16-1+3)-5=0 \qquad \therefore \quad k=-\frac{3}{7}$$

これは実数であるから，点 $\left(-4, -\dfrac{1}{2}\right)$ は軌跡に属す．　← A は軌跡に属す

(ii) $x-2y+3 \neq 0$ のとき，① より　$k=-\dfrac{x+4}{x-2y+3}$

これを ② へ代入すると

$$-\frac{x+4}{x-2y+3}(4x+2y+3)+(2y-5)=0$$

$$(x+4)(4x+2y+3)-(2y-5)(x-2y+3)=0$$

$$4x^2+4y^2+24x-8y+27=0$$

$$x^2+y^2+6x-2y+\frac{27}{4}=0$$

$$\therefore \quad (x+3)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4} \quad \cdots\cdots ⑤$$

ただし，$x-2y+3 \neq 0$ より，③ かつ ⑤ を満たす $(x, y)=\left(-4, -\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{6}{5}, \dfrac{9}{10}\right)$ を除く．

以上 (i), (ii) より，l_1 と l_2 の交点の軌跡の方程式は

$$(x+3)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4} \quad \text{かつ} \quad (x, y) \neq \left(-\frac{6}{5}, \frac{9}{10}\right)$$