【問題 5.4】
座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする．O を始点とする半直線上の二点 P,Q について $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$ が成立するとき，P と Q は C に関して対称であるという．

(1) 点 $\mathrm{P}(x,y)$ の C に関して対称な点 Q の座標を x,y を用いて表せ．

(2) 点 $\mathrm{P}(x,y)$ が原点を除いた曲線

$$(x-2)^2+(y-3)^2=13,\quad (x,y)\neq(0,0)$$

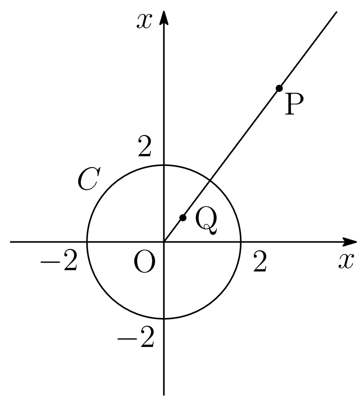
上を動くとき，Q の軌跡を求めよ．

（2010　横浜市立大）

解答
(1) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{4}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

であるから　　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{4x}{x^2+y^2},\dfrac{4y}{x^2+y^2}\right)$



(2) $\mathrm{Q}(X,Y)$ とする．
$(x,y)\neq(0,0)$ のとき，(1) より $(X,Y)\neq(0,0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}}{\mathrm{OQ}^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{4}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x=\frac{4X}{X^2+Y^2},\quad y=\frac{4Y}{X^2+Y^2}$$

これらを $(x-2)^2+(y-3)^2=13$ へ代入すると

$$(x-2)^2+(y-3)^2=13$$

$$x^2+y^2-4x-6y=0$$

$$\frac{16X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{16Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\frac{16X}{X^2+Y^2}-\frac{24Y}{X^2+Y^2}=0$$

$$\frac{16(X^2+Y^2)}{(X^2+Y^2)^2}-\frac{16X}{X^2+Y^2}-\frac{24Y}{X^2+Y^2}=0$$

$$\frac{16}{X^2+Y^2}-\frac{16X}{X^2+Y^2}-\frac{24Y}{X^2+Y^2}=0$$

$$2-2X-3Y=0$$

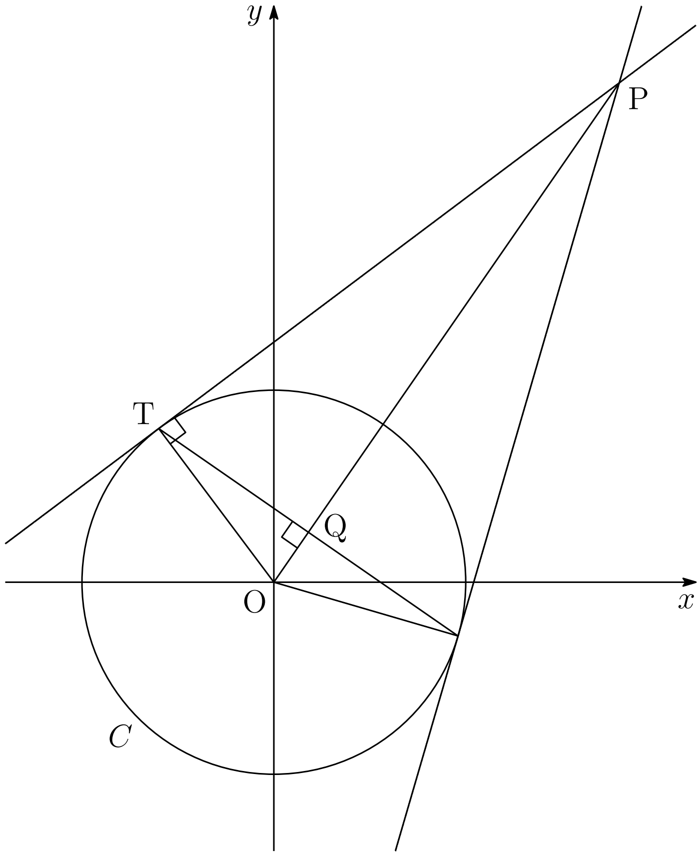
$$\therefore\quad 2X+3Y-2=0$$

これは $(X,Y)\neq(0,0)$ を満たす．
よって，Q の軌跡は

直線 $2x+3y-2=0$

※P と Q の位置関係について

中心 O，半径 r の円を C とする．O を始点とする半直線上にある 2 点 P ,Q が $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ を満たすとき，P と Q の位置関係は図のようになっている．



実際，図において

$$\triangle\mathrm{OPT}\backsim\triangle\mathrm{OTQ}$$

であるから

$$\mathrm{OP}:\mathrm{OT}=\mathrm{OT}:\mathrm{OQ}$$

$$\therefore\quad \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OT}^2=r^2$$

図からも分かる通り，問題文が
「C の外部の点 P から C へ接線を 2 本引き，接点を結ぶ線分と OP の交点を Q とする」
や
「C の外部の点 P から C へ接線を 2 本引き，接点を結ぶ線分の中点を Q とする」
もしくは，C を持ち出さないで
「O を始点とする半直線上の 2 点 P, Q が $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ を満たす」
となっている場合も同じ解答ができる．

【問題 5.5】
2 つの点 A$(1,2)$, B$(2,1)$ と放物線 $C : y = x^2 + ax + b$（ただし a, b は定数）がある．C と線分 AB（ただし A, B は除く）とがただ 1 つの共有点をもつとき，この放物線 C の頂点の存在する範囲を図示せよ．

（2007　愛知医科大）

解答
C の頂点を (p, q) とすると

$$C : y = (x-p)^2 + q$$

とかける．また，線分 AB（端点は除く）の方程式は

$$y = -x + 3 \quad (1 < x < 2)$$

であるから

$$(x-p)^2 + q = -x + 3 \qquad \text{すなわち} \qquad x^2 - (2p-1)x + p^2 + q - 3 = 0 \quad \cdots\cdots①$$

が $1 < x < 2$ の範囲に実数解を 1 つだけ（重解を含む）もつ p, q の条件が求める条件である．
ここで，① の判別式を D とすると

$$D = (2p-1)^2 - 4(p^2 + q - 3) = -4p - 4q + 13$$

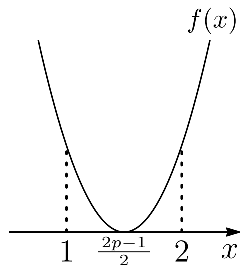
また，① の左辺を $f(x)$ とおく．

$$f(x) = x^2 - (2p-1)x + p^2 + q - 3$$

(i) ① が $1 < x < 2$ の範囲に重解をもつ条件は

$$\begin{cases} D = -4p - 4q + 13 = 0 \\ 1 < \dfrac{2p-1}{2} < 2 \end{cases}$$

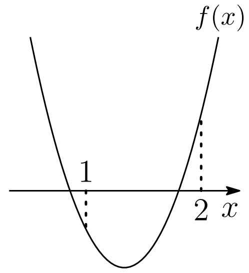
$$\therefore \quad \begin{cases} q = -p + \dfrac{13}{4} \\ \dfrac{3}{2} < p < \dfrac{5}{2} \end{cases}$$



(ii) ① が $x < 1$, $1 < x < 2$ の範囲に実数解を 1 つずつもつ条件は

$$\begin{cases} f(1) = p^2 - 2p + q - 1 < 0 \\ f(2) = p^2 - 4p + q + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} q < -p^2 + 2p + 1 \\ q > -p^2 + 4p - 3 \end{cases}$$



(iii) ① が $x = 1$ を解にもつ条件は

$$f(1) = p^2 - 2p + q - 1 = 0$$

$$\therefore \quad q = -p^2 + 2p + 1$$

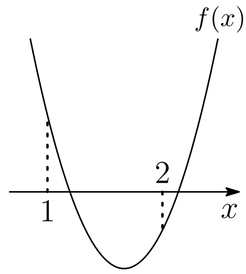
このとき，もう 1 つの解を α とすると

$$1+\alpha=2p-1 \qquad \therefore\quad \alpha=2p-2$$

これが $1<x<2$ の範囲にある条件は

$$1<2p-2<2 \qquad \therefore\quad \frac{3}{2}<p<2$$

(iv) ① が $1<x<2,\ 2<x$ の範囲に実数解を 1 つずつもつ条件は



$$\begin{cases} f(1)=p^2-2p+q-1>0 \\ f(2)=p^2-4p+q+3<0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} q>-p^2+2p+1 \\ q<-p^2+4p-3 \end{cases}$$

(v) ① が $x=2$ を解にもつ条件は

$$f(2)=p^2-4p+q+3=0$$

$$\therefore\quad q=-p^2+4p-3$$

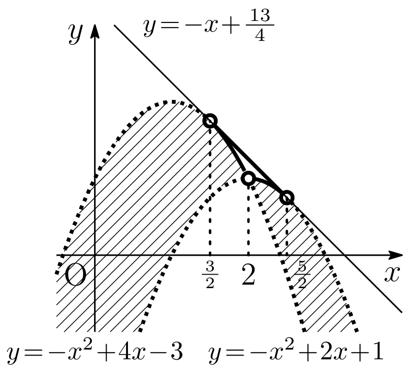
このとき，もう 1 つの解を β とすると

$$2+\beta=2p-1 \qquad \therefore\quad \beta=2p-3$$

これが $1<x<2$ の範囲にある条件は

$$1<2p-3<2 \qquad \therefore\quad 2<p<\frac{5}{2}$$

以上 (i) 〜 (v) より，求める C の頂点の存在範囲は図の斜線部（境界は実線を含み点線を含まない）になる．



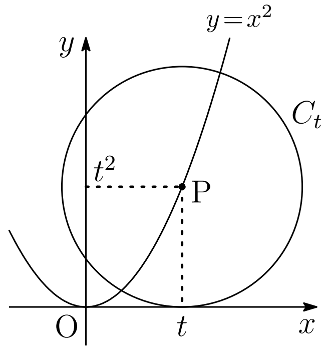
【問題 5.6】
点 P が放物線 $y=x^2$ の $x>0$ の部分を動くとき，P を中心とし，x 軸に接する円の通過範囲を図示せよ．

（岐阜大）

解答
$\mathrm{P}(t, t^2)$ $(t>0)$ を中心として x 軸に接する円の方程式は

$$C_t : (x-t)^2+(y-t^2)^2=t^4 \quad (t>0)$$

とおける．
求める通過領域を D とすると



$$\begin{aligned}(x, y)\in D &\iff \text{点 } (x,y) \text{ を通る円 } C_t\ (t>0) \text{ が存在する}\\ &\iff (x-t)^2+(y-t^2)^2=t^4 \text{ すなわち}\\ &\qquad (1-2y)t^2-2xt+x^2+y^2=0 \quad \cdots\cdots ①\\ &\qquad \text{を満たす実数 } t>0 \text{ が存在する}\end{aligned}$$

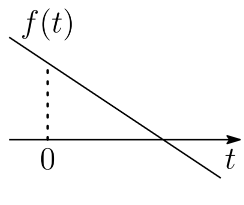
である．
ここで，① の左辺を $f(t)$ とおく．

$$f(t)=(1-2y)t^2-2xt+x^2+y^2$$

また，$1-2y\neq 0$ のとき，① の判別式を E とすると

$$\frac{E}{4}=x^2-(1-2y)(x^2+y^2)=2y\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}y\right)$$

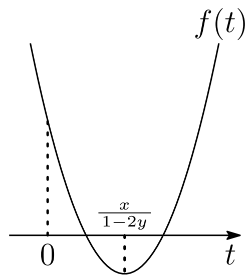
(i) $1-2y=0$ すなわち $y=\dfrac{1}{2}$ のとき



$f(t)=-2xt+x^2+\dfrac{1}{4}$ であるから，$f(0)=x^2+\dfrac{1}{4}>0$ であることに注意すると，① を満たす実数 $t>0$ が存在する条件は

$$-2x<0 \qquad \therefore \quad x>0$$

(ii) $1-2y>0$ すなわち $y<\dfrac{1}{2}$ のとき



$f(0)=x^2+y^2\geqq 0$ であることに注意すると，① を満たす実数 $t>0$ が存在する条件は

$$\begin{cases}\dfrac{E}{4}=2y\left(x^2+y^2-\dfrac{1}{2}y\right)\geqq 0 \quad \cdots\cdots ②\\[2ex] \dfrac{x}{1-2y}>0 \quad \cdots\cdots ③\end{cases}$$

② より

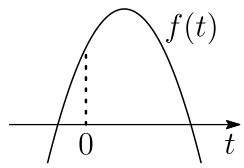
$$\begin{cases}y\geqq 0\\ x^2+y^2-\dfrac{1}{2}y\geqq 0\end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases}y\leqq 0\\ x^2+y^2-\dfrac{1}{2}y\leqq 0\end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} y \geqq 0 \\ x^2 + \left(y - \dfrac{1}{4}\right)^2 \geqq \dfrac{1}{16} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leqq 0 \\ x^2 + \left(y - \dfrac{1}{4}\right)^2 \leqq \dfrac{1}{16} \end{cases}$$

③ において $1 - 2y > 0$ であるから　　$x > 0$

(iii) $1 - 2y < 0$ すなわち $y > \dfrac{1}{2}$ のとき

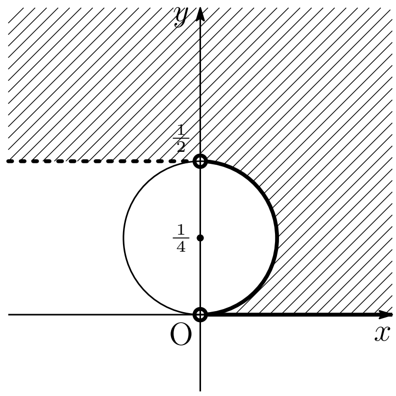
$f(t)$ のグラフは上に凸で



$$f(0) = x^2 + y^2 > x^2 + \frac{1}{4} > 0$$

であるから，① を満たす実数 $t > 0$ は存在する．

以上 (i) 〜 (iii) より，求める通過領域は図の斜線部（境界は実線を含み点線を含まない）になる．



【類題】

座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,0)$, $\mathrm{B}(3,2)$ をとる．m を実数とし，直線 $y=mx$ を l とする．

(1) l 上の点 P の座標を (t, mt) とするとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を t, m を用いて表せ．

(2) 点 P が l 上を動くとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を最小にする P の座標を (X, Y) とおく．X, Y を m で表せ．

(3) m が実数全体を動くとき，(X, Y) はある曲線 C 上を動く．C の方程式を求めよ．

（2013　中央大）

【類題】
原点 O とは異なる 2 点 $\mathrm{P}(a,b)$, $\mathrm{Q}(c,d)$ が与えられていて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ $(k>0)$ とする．また，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$ とする．次の問いに答えよ．

(1) k を c, d を用いて表せ．

(2) 点 P が直線 $2x+y-6=0$ 上を動くとき，点 Q はある円 C 上を動く．円 C の方程式を求めよ．

(3) (2) において，点 P が直線 $2x+y-6=0$ 上を $(0,6)$ から $(3,0)$ まで動くとき，円 C 上で点 Q の動く範囲を図示せよ．

（2019　大阪市立大）

【類題】

実数 t に対して，中心が (t, t^2) であり，直線 $y=-1$ に接する円を C_t と表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 円 C_t の方程式を求めよ．

(2) a は 0 でない定数とする．点 $\left(a, -\dfrac{1}{2}\right)$ が C_t 上にあるとき，t の値を a で表せ．

(3) 点 $(5, 8)$ が C_t 上にあるとき，t の値を求めよ．

(4) t がすべての実数値をとって変化するとき，円 C_t が通る座標平面上の領域を図示せよ．

（2010　関西学院大）

【類題】

座標平面上に 2 点 A$(-1,0)$, B$(3,2)$ をとる．m を実数とし，直線 $y=mx$ を l とする．

(1) l 上の点 P の座標を (t,mt) とするとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を t,m を用いて表せ．

(2) 点 P が l 上を動くとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を最小にする P の座標を (X,Y) とおく．X,Y を m で表せ．

(3) m が実数全体を動くとき，(X,Y) はある曲線 C 上を動く．C の方程式を求めよ．

（2013　中央大）

解答

(1)
$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2 &= (t+1)^2+(mt)^2+(t-3)^2+(mt-2)^2\\ &= 2(m^2+1)t^2-4(m+1)t+14\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2 &= 2(m^2+1)t^2-4(m+1)t+14\\ &= 2(m^2+1)\left(t-\frac{m+1}{m^2+1}\right)^2+\frac{12m^2-4m+12}{m^2+1}\end{aligned}$$

であるから，これは $t=\dfrac{m+1}{m^2+1}$ のとき最小になる．

よって　　$X=\dfrac{m+1}{m^2+1},\quad Y=\dfrac{m(m+1)}{m^2+1}$

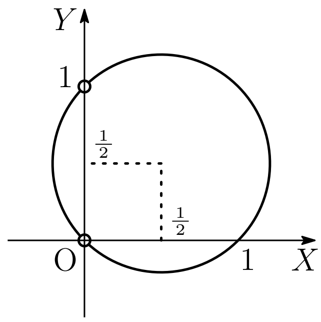
(3) $X=\dfrac{m+1}{m^2+1}$　……①,　$Y=mx$　……②

をみたす実数 m が存在する X,Y の条件を求める．

(i) $X=0$ のとき，① より $m=-1$（実数）で，② より　　$Y=0$
よって，点 $(0,0)$ は軌跡に属す．

(ii) $X\neq 0$ のとき，② より　　$m=\dfrac{Y}{X}$

これを ① へ代入すると



$$X(m^2+1)=m+1$$
$$X\left(\frac{Y^2}{X^2}+1\right)=\frac{Y}{X}+1$$
$$\frac{Y^2}{X}+X=\frac{Y}{X}+1$$
$$Y^2+X^2=Y+X$$
$$\therefore\quad \left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\qquad（ただし\ X\neq 0）$$

以上 (i),(ii) より，曲線 C の方程式は

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\quad (x,y)\neq(0,1)$$