数 3 演習の続きの問題を順次解説していきます．
成増校と白金台校で若干の進度ズレがあるので，両方とも終わった問題の続きから解説します．

質問等があったら，文章のみなら

`sieg-fc-7@ezweb.ne.jp` （ガラケー）

まで，写メなど添付ファイルがある場合は

`ishikawa-manabu@ishimana.sakura.ne.jp` （パソコン）

までお願いします．

【問題 9.2】
(1) a を正の実数とするとき，方程式 $x = a\log x$ の実数解の個数を求めよ．
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x - a\log x) = \infty$ は用いてよいものとする．

(2) n が自然数であるとき，方程式 $e^x = x^n$ の実数解の個数を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

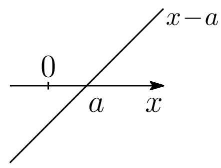
（2001　大阪教育大）

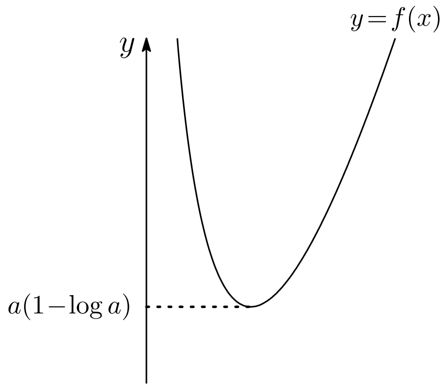
解答

(1) $a > 0$ として，$f(x) = x - a\log x$ とおくと　　$f'(x) = 1 - \dfrac{a}{x} = \dfrac{x-a}{x}$

$f'(x)$ において分母は $x > 0$ であるから，$f'(x)$ の符号は $x - a$ の符号で決まることに注意すると，増減表は

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$a(1-\log a)$	$\nearrow$





また

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x - a\log x) = \infty$$
$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}(x - a\log x) = \infty$$

であるから，グラフは図のようになる．
このグラフと x 軸の共有点の個数が求めるものであるから

$$\begin{cases} a(1-\log a) > 0 \text{ すなわち } 0 < a < e \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ a(1-\log a) = 0 \text{ すなわち } a = e \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ a(1-\log a) < 0 \text{ すなわち } a > e \text{ のとき } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

(2) $e^x = x^n$　……① とおく．

(i) $x > 0$ のとき

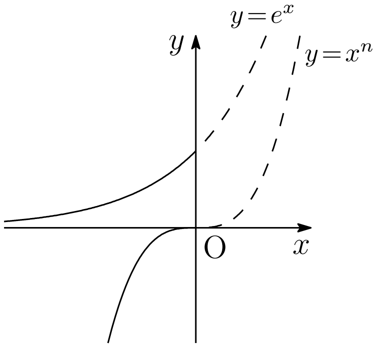
$$① \iff x = n\log x$$

であるから，$x > 0$ の範囲にある ① の実数解の個数は，(1) より

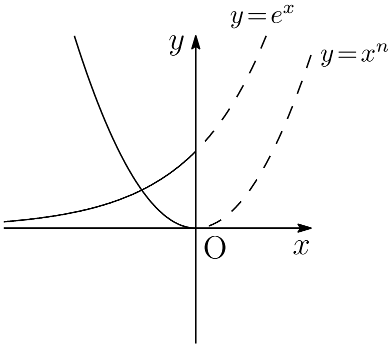
$$\begin{cases} n = 1, 2 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ n = 3, 4, 5, \ldots \text{ のとき } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

(ii) $x \leqq 0$ における $y = e^x$ と $y = x^n$ のグラフは次のようになる．

・n が奇数のとき



・n が偶数のとき



よって，$x \leqq 0$ の範囲にある ① の実数解の個数は，上のグラフの共有点の個数であるから

$$\begin{cases} n \text{ が奇数のとき } 0 \text{ 個} \\ n \text{ が偶数のとき } 1 \text{ 個} \end{cases}$$

以上 (i), (ii) より，① の実数解の個数は

$$\begin{cases} n = 1 \text{ のとき } 0 + 0 = 0 \text{ 個} \\ n = 2 \text{ のとき } 0 + 1 = 1 \text{ 個} \\ n = 3, 5, 7, \ldots \text{ のとき } 2 + 0 = 2 \text{ 個} \\ n = 4, 6, 8, \ldots \text{ のとき } 2 + 1 = 3 \text{ 個} \end{cases}$$

【問題 9.3】

$f(x) = e^x$ とし，$0 < h < 1$ とする．

(1) $f(x+h) = f(x) + hf'(x+ah)$ をみたす a を求めよ．

(2) $e^h < 1 + 3h$ を示せ．

(3) $1 + h + \dfrac{h^2}{2} < e^h < 1 + h + \dfrac{h^2}{2}(1+h)$ を示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{h\to+0} a$ を求めよ．

（2001　富山医科薬科大）

解答

(1) $f(x) = e^x$ のとき $f'(x) = e^x$ であるから

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+ah)$$

$$e^{x+h} = e^x + he^{x+ah}$$

$$e^h = 1 + he^{ah} \qquad (\because \quad e^x > 0)$$

$$he^{ah} = e^h - 1$$

$$e^{ah} = \frac{e^h - 1}{h} > 0 \qquad (\because \quad h > 0)$$

$$ah = \log\frac{e^h - 1}{h}$$

$$\therefore \quad a = \frac{1}{h}\log\frac{e^h - 1}{h} \qquad (\because \quad h > 0)$$

(2) $u(x) = (1+3x) - e^x$ とおくと　　$u'(x) = 3 - e^x$

$0 < x < 1$ のとき $e^x < 3$ より $u'(x) > 0$ であるから，$u(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で増加する．

そして $u(0) = 0$ であるから，$0 < x < 1$ で $u(x) > 0$　　$\therefore \quad e^x < 1 + 3x$

よって　　$e^h < 1 + 3h$

(3) (i) $v(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと　　$v'(x) = e^x - (1+x),\ v''(x) = e^x - 1$

$0 < x < 1$ のとき $e^x > 1$ より $v''(x) > 0$ であるから，$v'(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で増加する．

そして $v'(0) = 0$ であるから，$0 < x < 1$ で $v'(x) > 0$

よって $v(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で増加し，$v(0) = 0$ であるから

$0 < x < 1$ で $v(x) > 0$　　$\therefore \quad 1 + x + \dfrac{x^2}{2} < e^x$

(ii) $w(x) = \left\{1 + x + \dfrac{x^2}{2}(1+x)\right\} - e^x = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2}\right) - e^x$ とおくと

$$w'(x) = \left(1 + x + \frac{3x^2}{2}\right) - e^x,\ w''(x) = (1+3x) - e^x = u(x)$$

$0 < x < 1$ のとき (2) より $w''(x) > 0$ であるから，$w'(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で増加する．

そして $w'(0) = 0$ であるから，$0 < x < 1$ で $w'(x) > 0$

よって $w(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で増加し，$w(0)=0$ であるから

$0<x<1$ で $w(x)>0$ $\qquad \therefore \quad e^x < 1+x+\dfrac{x^2}{2}(1+x)$

以上 (i), (ii) より $\qquad 1+h+\dfrac{h^2}{2} < e^h < 1+h+\dfrac{h^2}{2}(1+h)$

(4) (1),(3) より

$$1+h+\frac{h^2}{2} < e^h < 1+h+\frac{h^2}{2}(1+h)$$

$$h+\frac{h^2}{2} < e^h-1 < h+\frac{h^2}{2}(1+h)$$

$$1+\frac{h}{2} < \frac{e^h-1}{h} < 1+\frac{h}{2}(1+h)$$

$$\log\left(1+\frac{h}{2}\right) < \log\frac{e^h-1}{h} < \log\left\{1+\frac{h}{2}(1+h)\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{2}\right) < a < \frac{1}{h}\log\left\{1+\frac{h}{2}(1+h)\right\}$$

そして

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{2}\right) = \lim_{h\to+0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\frac{1}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\log\left\{1+\frac{h}{2}(1+h)\right\} = \lim_{h\to+0}\frac{\log\left\{1+\frac{h}{2}(1+h)\right\}}{\frac{h}{2}(1+h)}\cdot\frac{1+h}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{h\to+0} a = \frac{1}{2}$$

※極限計算には，32 ページ 4-(6)

$$\square \to 0 \text{ のとき } \lim\frac{\log(1+\square)}{\square} = 1$$

を用いた．この公式は覚えておきたい．

【問題 9.4】

(1) 実数 x が $-1 < x < 1,\ x \neq 0$ をみたすとき，次の不等式を示せ.

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の不等式を示せ.

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$

（2009　東京大）

解答

(1) $-1 < x < 1,\ x \neq 0$ のとき

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \cdots\cdots① \iff \left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x) < \frac{1}{x}\log(1+x)$$

$$\iff \frac{\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)}{x} > 0 \quad \cdots\cdots②$$

である．そこで

$$f(x) = \log(1+x)-(x-1)\log(1-x) \quad (-1 < x < 1)$$

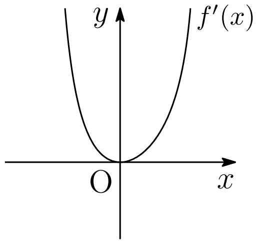
とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1\cdot\log(1-x) - (x-1)\cdot\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1+x} - \log(1-x) - 1$$

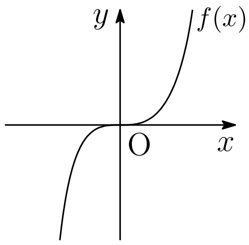
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{-1}{1-x} = \frac{x(x+3)}{(1-x)(1+x)^2}$$

であるから，増減表は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	



x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	



よって

$-1 < x < 0$ のとき $f(x) < 0$ より $\quad \dfrac{f(x)}{x} > 0$

$0 < x < 1$ のとき $f(x) > 0$ より $\quad \dfrac{f(x)}{x} > 0$

となるから，$-1 < x < 1,\ x \neq 0$ のとき，② すなわち ① が成り立つ.

(2) ① で $x = 0.01 = \dfrac{1}{100}$ とすると　　$0.99^{-99} < 1.01^{100}$

両辺に 0.99^{100} をかけて　　$0.99 < (1.01 \times 0.99)^{100} = 0.9999^{100}$　……③

また，① で $x = -0.01 = -\dfrac{1}{100}$ とすると　　$1.01^{101} < 0.99^{-100}$

両辺に 0.99^{101} をかけて　　$0.9999^{101} < 0.99$　……④

③, ④ より　　$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$

【問題 9.5】
関数 $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めなさい．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものは 1 本しかないことを示し，その接線の方程式を求めなさい．

（2003　長崎大）

解答

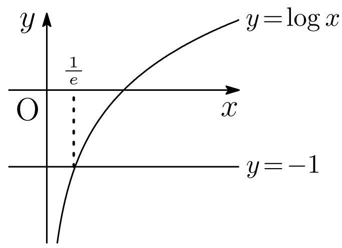
(1) $x > 0$ のとき　　$f(x) = x^x = e^{\log x^x} = e^{x \log x}$

であるから

$$f'(x) = \left(e^{x \log x}\right)' = e^{x \log x} \cdot \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1)$$

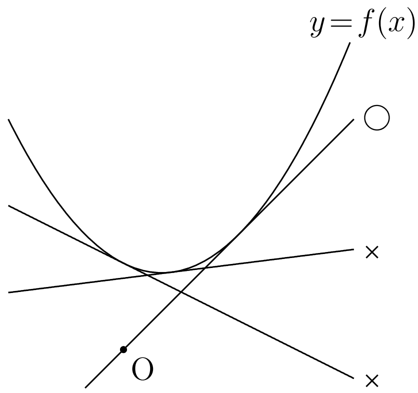
$f'(x)$ において $x^x > 0$ であるから，$f'(x)$ の符号は $\log x + 1 = \log x - (-1)$ の符号，すなわち，曲線 $y = \log x$ と直線 $y = -1$ の上下関係で決まることに注意すると，増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	↗



よって，$f(x)$ は $x = \dfrac{1}{e}$ のとき最小値 $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ をとる．

イメージ



(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 (t, t^t) $(t > 0)$ における接線の方程式は

$$y = t^t(\log t + 1)(x - t) + t^t \quad \cdots\cdots ①$$

この接線が原点を通る条件は

$$0 = t^t(\log t + 1) \cdot (-t) + t^t$$

$$0 = (\log t + 1) \cdot (-t) + 1 \qquad (\because \quad t^t > 0)$$

$$\therefore \quad t \log t + t - 1 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

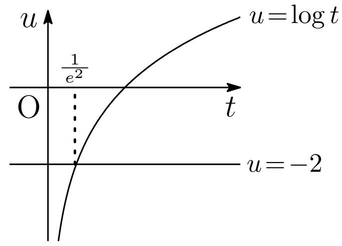
よって，② を満たす実数 $t > 0$ がただ 1 つであることを示せばよい．

そこで，$g(t) = t \log t + t - 1$ $(t > 0)$ とおくと

$$g'(t) = 1 \cdot \log t + t \cdot \frac{1}{t} + 1 = \log t + 2$$

$g'(t)$ の符号は $\log t + 2 = \log t - (-2)$ の符号，すなわち，曲線 $u = \log t$ と直線 $u = -2$ の上下関係で決まることに注意すると，増減表は

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	$-\dfrac{1}{e^2}-1$	$\nearrow$



また

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty}(t\log t + t - 1) = \infty$$

$$\lim_{t\to+0} g(t) = \lim_{t\to+0}(t\log t + t - 1) = -1$$

であるから，グラフは図のようになる．

よって，② を満たす実数 $t>0$ は $t=1$ のただ1つである．このときの ① が求める接線の方程式であるから，答えは　　$y=x$