4.　積分法

§10.　定積分と最大最小

【問題 10.1】
次の問いに答えよ．

(1) m を自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin mx dx$ の値を求めよ．

(2) m, n を自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$ の値を求めよ．

(3) a, b を実数とする．定積分 $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x - a\sin x - b\sin 2x)^2 dx$ を計算せよ．

(4) (3) において，a, b を変化させたときの I の最小値，およびそのときの a, b の値を求めよ．

（2002　お茶の水女子大）

解答

(1)
$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x\sin mx dx &= \left[-\frac{1}{m}x\cos mx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx \\
&= -\frac{1}{m}\{\pi\cdot(-1)^m - (-\pi)\cdot(-1)^m\} \\
&\qquad + \frac{1}{m}\left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= (-1)^{m+1}\cdot\frac{2\pi}{m} + \frac{1}{m^2}(0-0) \\
&= (-1)^{m+1}\cdot\frac{2\pi}{m}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} x & & -\dfrac{1}{m}\cos mx \\ 1 & & \sin mx \end{array}$$

(2) $m = n$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2mx}{2}dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\{\pi - (-\pi)\} - \frac{1}{4m}(0-0) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$m \neq n$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2(m-n)}(0-0) - \frac{1}{2(m+n)}(0-0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(3)\quad I &= \int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x-b\sin 2x)^2dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}(x^2+a^2\underbrace{\sin^2 x}_{(2)\,m=n}+b^2\underbrace{\sin^2 2x}_{(2)\,m=n}-2a\underbrace{x\sin x}_{(1)\,m=1}+2ab\underbrace{\sin x\sin 2x}_{(2)\,m\neq n}-2b\underbrace{x\sin 2x}_{(1)\,m=2})dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi}+a^2\cdot\pi+b^2\cdot\pi-2a\cdot 2\pi+2ab\cdot 0-2b\cdot(-\pi) \\
&= \frac{1}{3}\{\pi^3-(-\pi^3)\}+\pi a^2+\pi b^2-4\pi a+2\pi b \\
&= \pi a^2+\pi b^2-4\pi a+2\pi b+\frac{2}{3}\pi^3
\end{aligned}
$$

(4) $I=\pi a^2+\pi b^2-4\pi a+2\pi b+\dfrac{2}{3}\pi^3=\pi(a-2)^2+\pi(b+1)^2+\dfrac{2}{3}\pi^3-5\pi$

であるから，I は $a=2,\ b=-1$ のとき最小値 $\dfrac{2}{3}\pi^3-5\pi$ をとる．

【問題 10.2】

(1) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$ と $J = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ の値を求めよ.

(2) 実数 a, b が $\displaystyle\int_0^{\pi} (a\cos x + b\sin x)^2 dx = 1$ をみたしながら動くとき

$\displaystyle\int_0^{\pi} (e^x - a\cos x - b\sin x)^2 dx$ の最大値を求めよ.

（2011　富山大）

解答

$$\begin{array}{ll} e^x & \sin x \\ e^x & \cos x \end{array}$$

(1)
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} e^x \cos x dx \\ &= \Big[e^x \sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \\ &= (e^{\pi} \cdot 0 - 1 \cdot 0) - J \\ &= -J \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

また

$$\begin{array}{ll} e^x & -\cos x \\ e^x & \sin x \end{array}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \\ &= \Big[-e^x \cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx \\ &= -\{e^{\pi} \cdot (-1) - 1 \cdot 1\} + I \\ &= I + e^{\pi} + 1 \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

①, ② より

$$I = -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1), \qquad J = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$$

(2)
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (a\cos x + b\sin x)^2 dx &= \int_0^{\pi} (a^2\cos^2 x + 2ab\cos x \sin x + b^2 \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(a^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} + ab\sin 2x + b^2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2x + ab\sin 2x \right) dx \\ &= \left[\frac{a^2+b^2}{2}x + \frac{a^2-b^2}{4}\sin 2x - \frac{ab}{2}\cos 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{a^2+b^2}{2}\pi + \frac{a^2-b^2}{4}(0-0) - \frac{ab}{2}(1-1) \\ &= \frac{a^2+b^2}{2}\pi \end{aligned}$$

これが 1 に等しいとき　　$a^2 + b^2 = \dfrac{2}{\pi}$　$\cdots\cdots ③$

このとき

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (e^x - a\cos x - b\sin x)^2 dx &= \int_0^\pi \{e^x - (a\cos x + b\sin x)\}^2 dx \\
&= \int_0^\pi \{e^{2x} - 2e^x(a\cos x + b\sin x) + (a\cos x + b\sin x)^2\} dx \\
&= \int_0^\pi \{e^{2x} - 2ae^x\cos x - 2be^x\sin x + (a\cos x + b\sin x)^2\} dx \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^\pi - 2aI - 2bJ + 1 \\
&= \frac{1}{2}(e^{2\pi} - 1) + a(e^\pi + 1) - b(e^\pi + 1) + 1 \\
&= (e^\pi + 1)(a - b) + \frac{1}{2}(e^{2\pi} + 1)
\end{aligned}$$

さて，③ を満たす実数 a, b は

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\theta, \qquad b = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

と書けるから

$$a - b = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin\theta - \cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

そして，等号成立は $\theta - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ より $\qquad \theta = \dfrac{3}{4}\pi$

よって，求める最大値は

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}(e^\pi + 1) + \frac{1}{2}(e^{2\pi} + 1)$$

【問題 10.3】

x の関数 $f(x)$ を，

$$f(x)=\int_1^2 |\log t-\log x|dt \quad (x>0)$$

によって定義する．ただし，対数は自然対数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(1)$ および $f(2)$ の値を求めよ．

(2) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき，積分を実行して $f(x)$ を x の式で書け．

(3) $1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値およびそれぞれのときの x の値を求めよ．ここで，必要ならば自然対数の底 e が $2.7<e<2.8$ を満たすことを用いてよい．

（2004　東京理科大）

解答

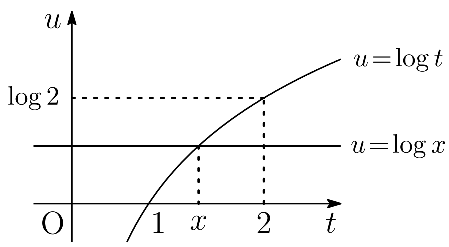
$$f(x)=\int_1^2 |\log t-\log x|dt \qquad (x>0)$$

において，積分は t についての積分であるから，積分するときは x は定数扱いであることに注意する．また，絶対値のまま積分することはできないから，曲線 $u=\log t$ と直線 $u=\log x$ の上下関係で絶対値をはずしてから積分を実行する．

(1) (2) で求めるから省略.

(2) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき $0 \leqq \log x \leqq \log 2$ であるから

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_1^2 |\log t-\log x|dt \\
&= \int_1^x (\log x-\log t)dt+\int_x^2 (\log t-\log x)dt \\
&= \Big[t\log x-(t\log t-t)\Big]_1^x+\Big[(t\log t-t)-t\log x\Big]_x^2 \\
&= (x-1)\log x-(x\log x-1\cdot 0)+(x-1) \\
&\qquad +(2\log 2-x\log x)-(2-x)-(2-x)\log x \\
&= 2x-3\log x+2\log 2-3
\end{aligned}$$

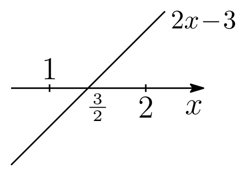


(3) $f(x)=2x-3\log x+2\log 2-3 \qquad (1 \leqq x \leqq 2)$

$$f'(x)=2-\frac{3}{x}=\frac{2x-3}{x}$$

$f'(x)$ において分母は $x>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は $2x-3$ の符号で決まることに注意すると，増減表は

x	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2\log 2-1$	$\searrow$	$5\log 2-3\log 3$	$\nearrow$	$1-\log 2$



ここで

$$f(1)-f(2)=(2\log 2-1)-(1-\log 2)=3\log 2-2=\log\frac{8}{e^2}$$

であり，$2.7<e<2.8$ より $7.29<e^2<7.84$ であるから

$$f(1)-f(2)=\log\frac{8}{e^2}>0 \qquad \therefore \quad f(1)>f(2)$$

よって，$f(x)$ は

$x=1$ のとき最大値 $2\log 2-1$

$x=\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $5\log 2-3\log 3$

をとる．

【問題 10.4】

(1) $0 < x < \pi$ のとき，$\sin x - x\cos x > 0$ を示せ．

(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^\pi |\sin x - ax|dx$ $(0 < a < 1)$ を最小にする a の値を求めよ．

（2010　横浜国立大）

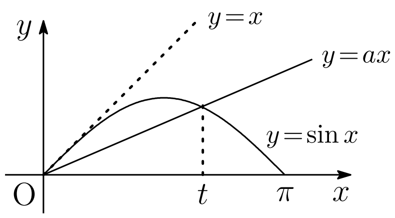
解答

(1) $f(x) = \sin x - x\cos x$ とおくと

$$f'(x) = \cos x - \{1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x)\} = x\sin x$$

$0 < x < \pi$ のとき $f'(x) > 0$ であるから，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ で増加する．そして $f(0) = 0$ であるから，$0 < x < \pi$ で $f(x) > 0$ である．

(2) $(\sin x)' = \cos x$ で，$x = 0$ のときの値は 1 である．よって，$0 < a < 1$ のとき，直線 $y = ax$ と曲線 $y = \sin x$ の位置関係は図のようになる．そこで，図のように t を定めると



$$0 < t < \pi, \qquad \sin t = at \quad \cdots\cdots①$$

であるから

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi |\sin x - ax|dx \\
&= \int_0^t (\sin x - ax)dx + \int_t^\pi (ax - \sin x)dx \\
&= \left[-\cos x - \frac{a}{2}x^2\right]_0^t + \left[\frac{a}{2}x^2 + \cos x\right]_t^\pi \\
&= -(\cos t - 1) - \frac{a}{2}t^2 + \frac{a}{2}(\pi^2 - t^2) + \{(-1) - \cos t\} \\
&= -2\cos t - at^2 + \frac{a}{2}\pi^2 \\
&= -2\cos t - t\sin t + \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}
\end{aligned}$$

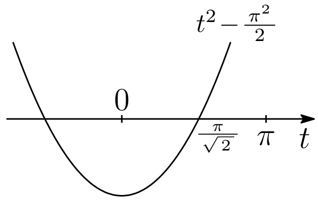
① を満たす t を a で表すことはできないが，a を t で表すことはできる．なので，I も t で表してしまう．

また

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= 2\sin t - (1\cdot\sin t + t\cdot\cos t) + \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{\cos t\cdot t - \sin t\cdot 1}{t^2} \\
&= \sin t - t\cos t + \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{t\cos t - \sin t}{t^2} \\
&= \frac{\sin t - t\cos t}{t^2}\left(t^2 - \frac{\pi^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\dfrac{dI}{dt}$ において，分母は正で，分子も (1) より正であるから，$\dfrac{dI}{dt}$ の符号は $t^2 - \dfrac{\pi^2}{2}$ の符号で決まることに注意すると，増減表は

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dI}{dt}$		$-$	0	$+$	
I		$\searrow$	最小	$\nearrow$	



① より，I を最小にする a の値は

$$a=\frac{\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}}{\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

【問題 10.5】

$f(x) = 1 - \cos x - x \sin x$ とする．

(1) $0 < x < \pi$ において，$f(x) = 0$ は唯一の解を持つことを示せ．

(2) $J = \displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)| dx$ とする．(1) の唯一の解を α とするとき，J を $\sin\alpha$ の式で表せ．

(3) (2) で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ．

（2010　東京工業大）

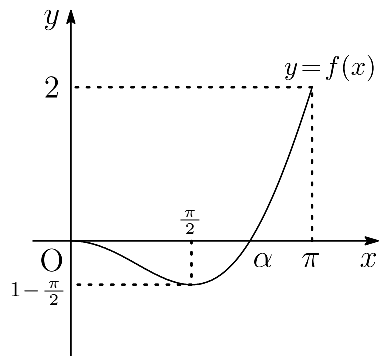
解答

(1) $f(x) = 1 - \cos x - x \sin x$

$f'(x) = \sin x - (1 \cdot \sin x + x \cos x) = -x \cos x$

$0 < x < \pi$ のとき，$f'(x)$ の符号は $\cos x$ の符号と異符号であるから，増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$1 - \frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	2



よって，グラフは図のようになるから，$0 < x < \pi$ において $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ．

(2) (1) の過程より，α は

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \quad 1 - \cos\alpha - \alpha \sin\alpha = 0$$

を満たすから　$\alpha = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

よって

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\pi} |f(x)|dx \\
&= \int_0^{\alpha} (-1+\cos x + x\sin x)dx + \int_{\alpha}^{\pi} (1-\cos x - x\sin x)dx \\
&= \Big[-x+\sin x\Big]_0^{\alpha} + \left(\Big[-x\cos x\Big]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} \cos x dx\right) \\
&\qquad + \Big[x-\sin x\Big]_{\alpha}^{\pi} - \left(\Big[-x\cos x\Big]_{\alpha}^{\pi} + \int_{\alpha}^{\pi} \cos x dx\right) \\
&= -\alpha + (\sin\alpha - 0) - (\alpha\cos\alpha - 0\cdot 1) + \Big[\sin x\Big]_0^{\alpha} \\
&\qquad + (\pi - \alpha) - (0 - \sin\alpha) + \{\pi\cdot(-1) - \alpha\cos\alpha\} - \Big[\sin x\Big]_{\alpha}^{\pi} \\
&= -2\alpha + 2\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha + (\sin\alpha - 0) - (0 - \sin\alpha) \\
&= 4\sin\alpha - 2\alpha(1+\cos\alpha) \\
&= 4\sin\alpha - 2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot(1+\cos\alpha) \\
&= 4\sin\alpha - 2\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
x & & -\cos x \\
1 & & \sin x
\end{array}
$$

(3) $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) = 1 - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \dfrac{3}{4}\pi\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}+4-3\pi}{4\sqrt{2}} > \dfrac{4\times 1.4 + 4 - 3\times 3.2}{4\sqrt{2}} = 0$

であるから，(1) の過程より　　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3}{4}\pi$

そして，$\sin x$ は $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ において減少するから

$$1 > \sin\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad 2 > 2\sin\alpha > \sqrt{2}$$

よって　　$J > \sqrt{2}$