

積分計算 (2)

指数関数の積分

C は積分定数とする.

$$(1) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(2) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

※ 1 次関数との合成

定数 $A (\neq 0)$, B に対して

$$\int e^{Ax+B} dx = \frac{1}{A} e^{Ax+B} + C$$

【問題 2】

次の原始関数 (不定積分) を求めよ.

$$(1) \int e^{2x+1} dx$$

$$(2) \int (e^x - 3e^{-x})^2 dx$$

$$(3) \int (e^x - e^{-x})^3 dx$$

$$(4) \int \frac{(e^{3x} - 4)^2}{e^{4x}} dx$$

$$(5) \int \frac{(3e^{6x} - 2e^{-2x})^2}{e^{7x}} dx$$

$$(6) \int \frac{(3e^{7x} - 5e^{-2x})^2}{e^{9x}} dx$$

$$(7) \int \frac{(e^x + 1)^4}{e^{2x}} dx$$

解答

$$(1) \int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$$

$$(2) \int (e^x - 3e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} - 6 + 9e^{-2x}) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - 6x - \frac{9}{2} e^{-2x} + C$$

$$(3) \int (e^x - e^{-x})^3 dx = \int (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}) dx = \frac{1}{3} e^{3x} - 3e^x - 3e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-3x} + C$$

$$(4) \int \frac{(e^{3x} - 4)^2}{e^{4x}} dx = \int \frac{e^{6x} - 8e^{3x} + 16}{e^{4x}} dx = \int (e^{2x} - 8e^{-x} + 16e^{-4x}) dx \\ = \frac{1}{2} e^{2x} + 8e^{-x} - 4e^{-4x} + C$$

$$(5) \int \frac{(3e^{6x} - 2e^{-2x})^2}{e^{7x}} dx = \int \frac{9e^{12x} - 12e^{4x} + 4e^{-4x}}{e^{7x}} dx = \int (9e^{5x} - 12e^{-3x} + 4e^{-11x}) dx \\ = \frac{9}{5} e^{5x} + 4e^{-3x} - \frac{4}{11} e^{-11x} + C$$

$$(6) \int \frac{(3e^{7x} - 5e^{-2x})^2}{e^{9x}} dx = \int \frac{9e^{14x} - 30e^{5x} + 25e^{-4x}}{e^{9x}} dx = \int (9e^{5x} - 30e^{-4x} + 25e^{-13x}) dx$$
$$= \frac{9}{5}e^{5x} + \frac{15}{2}e^{-4x} - \frac{25}{13}e^{-13x} + C$$

$$(7) \int \frac{(e^x + 1)^4}{e^{2x}} dx = \int \frac{e^{4x} + 4e^{3x} + 6e^{2x} + 4e^x + 1}{e^{2x}} dx = \int (e^{2x} + 4e^x + 6 + 4e^{-x} + e^{-2x}) dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 4e^x + 6x - 4e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$