積分計算（４）

プチ置換（１）

C は積分定数とする．
区間 I で微分可能な関数 $f(x)$ が $f(x) \neq 0$ $(x \in I)$ を満たすとき

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

であった（合成微分）から，これを積分の形にすれば

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C \qquad \leftarrow \text{「積分公式」として使う !!}$$

となる．

※被積分関数が分数のときは，まずは分母の微分を考える．そして，分母の微分が分子にあればプチ置換 (1) で計算できる．ただし，微分して分数になる場合はカモフラージュされているから注意する（後の問題で解説する）．

【問題 4】
次の原始関数（不定積分）を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{5x}{3x^2-1}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{3x^2+2}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\sin x+3}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{-\cos x}{3\sin x+2}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{4\sin 3x}{6\cos 3x-5}dx$

(11) $\displaystyle\int \tan x dx$

(12) $\displaystyle\int \tan 2x dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log 2x}dx$

(16) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\cos x}dx$

(17) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

(18) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2+\sin^2 x}dx$

解答

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+1}dx = \log|x^2+4x+1|+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx = \log|x^3+1|+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-1}dx = \log|e^x-1|+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \log(e^x+e^{-x})+C$

※ $e^x+e^{-x}>0$ であるから絶対値をつけていないが，$\log|e^x+e^{-x}|+C$ でも間違いではない．
符号が不安なら，絶対値をつけておくのが無難である．

(5) $\displaystyle\int \frac{5x}{3x^2-1}dx = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2-1}dx = \frac{5}{6}\log|3x^2-1|+C$

※分数であるから，まずは分母の $3x^2-1$ を微分してみると　$(3x^2-1)'=6x$
これは分子の $5x$ ではないけど，係数を修正すれば分子になっている．

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{3x^2+2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2}dx = \frac{1}{6}\log(3x^2+2)+C$

(7) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}dx = \frac{1}{2}\log|e^{2x}-1|+C$

(8) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\sin x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{2\sin x+3}dx = \frac{1}{2}\log(2\sin x+3)+C$

(9) $\displaystyle\int \frac{-\cos x}{3\sin x+2}dx = \frac{-1}{3}\int \frac{3\cos x}{3\sin x+2}dx = -\frac{1}{3}\log|3\sin x+2|+C$

(10) $\displaystyle\int \frac{4\sin 3x}{6\cos 3x-5}dx = \frac{4}{-18}\int \frac{-18\sin 3x}{6\cos 3x-5}dx = -\frac{2}{9}\log|6\cos 3x-5|+C$

(11) $\displaystyle\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\log|\cos x|+C$

※ $\tan x$ の微分は $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ にしてから導いたと思う．積分も同様である．

(12) $\displaystyle\int \tan 2x dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx = \frac{1}{-2}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\log|\cos 2x|$

(13) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log|\sin x|+C$

(14) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x}dx = \log|\log x|+C$

※分母の微分は　$(x\log x)' = 1\cdot\log x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \log x + 1$

だからといって

$$\int\frac{1}{x\log x}dx = \frac{1}{\log x+1}\int\frac{\log x+1}{x\log x}dx = \log|x\log x| + C$$

としてはいけない．定数なら積分の外に出せるが，積分変数を含むものを積分の外には出せないからである．

$$\int 3\cos x dx = 3\int\cos x dx \quad \text{（できる）}$$

$$\int\frac{\sin x}{x}dx = \sin x\int\frac{1}{x}dx \quad \text{（できない）}$$

この問題の場合，$\dfrac{1}{x}$ を $\log x$ の微分とみるのが正解である．

(15) $\displaystyle\int\frac{1}{x\log 2x}dx = \int\frac{\frac{1}{x}}{\log 2x}dx = \log|\log 2x| + C$

(16) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx = \int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x}dx = \log|\tan x| + C$

※ $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx = \int\frac{2}{\sin 2x}dx$ としてしまうと，次の問題と同様の計算になる．

(17) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx = \int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \int\frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$

$\displaystyle= \int\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx = \int\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{-\cos x}{1-\sin x}\right)dx$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\{\log(1+\sin x) - \log(1-\sin x)\} + C = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$

※ $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$ と $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx$ は有名問題である．

これらは計算方法を覚えていなければ解けなくて当たり前の問題である．

(18) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx = \int\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin x}{(2-\cos x)(2+\cos x)}dx$

$\displaystyle= \int\frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{2-\cos x} + \frac{\sin x}{2+\cos x}\right)dx = \int\frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{2-\cos x} - \frac{-\sin x}{2+\cos x}\right)dx$

$\displaystyle= \frac{1}{4}\{\log(2-\cos x) - \log(2+\cos x)\} + C = \frac{1}{4}\log\frac{2-\cos x}{2+\cos x} + C$

(19) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{2+\sin^2 x}dx = \int\frac{\sin x}{3-\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin x}{(\sqrt{3}-\cos x)(\sqrt{3}+\cos x)}dx$

$\displaystyle= \int\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}-\cos x} + \frac{\sin x}{\sqrt{3}+\cos x}\right)dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{3} - \cos x} - \frac{-\sin x}{\sqrt{3} + \cos x} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ \log(\sqrt{3} - \cos x) - \log(\sqrt{3} + \cos x) \right\} + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} - \cos x}{\sqrt{3} + \cos x} + C
\end{aligned}
$$