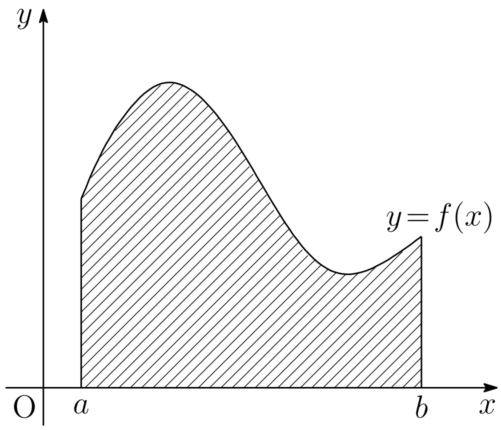
4.　積分法

1．積分の本来の定義

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で，$a \leqq x \leqq b$ に対して $f(x) \geqq 0$ であるとする．このとき，曲線 $y=f(x)$，x 軸，2 直線 $x=a$, $x=b$ により囲まれる図形（図の斜線部）ができ，この図形には「面積」があると考えるのが自然である．では，その「面積」をどのようにして求めたらいいだろうか．この問いに答えるのが「積分」である．



定義

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする．区間の分割を

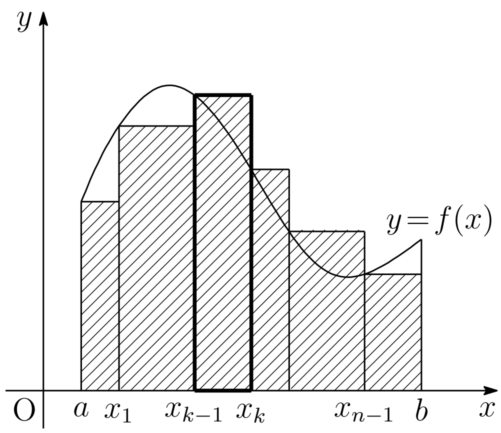
$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

で定め，分割した小区間の最大幅を

$$|\Delta| = \max\{x_k - x_{k-1} \mid 1 \leqq k \leqq n\}$$

で定めるとき，極限値

$$\underbrace{\lim_{|\Delta|\to 0}}_{\text{分割を細かくする}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}_{\text{太線の長方形の面積}}}_{\text{斜線部の面積}}$$



で「面積」が求められるはずである．これを $f(x)$ の $[a,b]$ における**定積分**といい

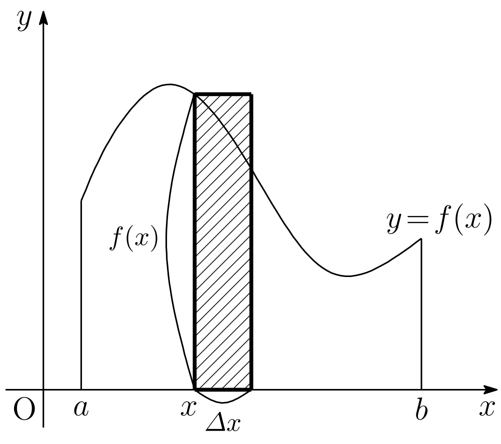
$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す．

※積分区間を細かく分割し，分割した小区間の左端を x，幅を Δx で代表してかくと

$$\lim_{\Delta x\to 0} \sum f(x)\,\underline{\Delta x} = \int_a^b f(x)\,\underline{dx}$$

というように簡略化でき，記号 $\int$ や dx の意味もよくわかる．



2. 原始関数

区間 I で定義された関数 $f(x)$ に対して，I で $F'(x) = f(x)$ をみたす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．そして，$f(x)$ の原始関数（全体）を

$$\int f(x)dx$$

で表す．

※ $F_1(x)$ と $F_2(x)$ を $f(x)$ の原始関数とするとき，I で

$$\{F_1(x) - F_2(x)\}' = {F_1}'(x) - {F_2}'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

が成り立つから，平均値の定理より，$F_1(x) - F_2(x)$ は I で定数である．よって，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数のひとつとするとき，任意の原始関数は定数 C を用いて

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

で与えられる．この定数 C を**積分定数**という．

※正しい定義ではないが，後で述べる**微積分の基本定理**により，$\displaystyle\int f(x)dx$ を不定積分ということもある．

3. 代表的な原始関数（不定積分）

C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

(3) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$ (4) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

(5) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$ (6) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

※1 次関数との合成

定数 $A\ (\neq 0),\ B$ に対して

$$\int e^{Ax+B}dx = \frac{1}{A}e^{Ax+B} + C$$

$$\int \sin(Ax+B)dx = -\frac{1}{A}\cos(Ax+B) + C$$

などが成り立つ（他も同様）．

4. 公式

区間 I で原始関数が存在する関数 $f(x), g(x)$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （k は定数）

(2) $\displaystyle\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ （複号同順）

5. プチ置換

区間 I で微分可能な関数 $f(x)$ に対して，次が成り立つ．ただし，C は積分定数とする．

(1) $f(x) \neq 0$ $(x \in I)$ のとき

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$$

(2) $f(x) > 0$ $(x \in I)$ のとき

$$\int f(x)^{\alpha} \cdot f'(x) dx = \frac{1}{\alpha+1} f(x)^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

※ α が整数のときは，$f(x) > 0$ $(x \in I)$ でなくてもよい．

☆三角関数の整数乗を含む積分（重要）

奇数乗か偶数乗かで大まかにわかれる．

(1) 偶数乗のみのとき

2 倍角の公式 $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$，$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ を用いて次数を下げる．

(2) 奇数乗があるとき

奇数乗から 1 つ外に出し，残った偶数乗を $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を用いて書き直し，そしてプチ置換で計算する．

6. 部分積分

$f(x), g(x)$ を区間 I で微分可能な関数とする．このとき，I で

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

をみたすから，次が成り立つ．

$$\int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx = f(x)g(x) + C$$

よって，$f'(x)g(x)$ の原始関数が求められるときは，

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, dash] \arrow[dr] & g(x) \arrow[dl] \\ f'(x) & g'(x) \end{tikzcd}$$

により $f(x)g'(x)$ の原始関数が求められる．

☆部分積分のやり方

基本的に，被積分関数が積の形のときに用いる．

(1) 被積分関数を「左上」と「右下」に配置する．

まずはやってみる．うまくいかなければ逆配置．経験をつむと，配置の仕方がわかってくる．

- $x^{\bullet}$ は「左上」に置くとよさそう．(準正解)
- 「右下」には，原始関数が（簡単に）求まるものしか置けない．(正解) → log は「左上」?

(2) 「左下」と「右上」を埋める．

(3) 矢印の通りに部分積分を実行する．

※特殊形

(1) 「右下」を 1 として部分積分する．

(2) 左辺と同じ積分が右辺にも現れた場合，最後は方程式を解くようにして求める．

※テクニック

「左下」をみてから「右上」を定数で修正する．

7. 定積分の性質

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x), g(x)$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ （k は定数）

(2) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ （複号同順）

(3) $f(x) \leqq g(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$

(4) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx$

(5) $a < c < b$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

※便宜上

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

と定めると，例えば

$$\int_a^c f(x)dx \left(= \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx\right) = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

という計算もできる．

8. 微積分の基本定理

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leqq x \leqq b)$$

とおくと，$I(x)$ は $[a,b]$ で微分可能で，$I'(x) = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ が成り立つ．

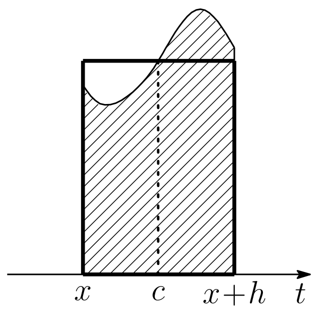
証明

$x \in [a,b]$ を任意にとり，$h \neq 0$ を $x+h \in [a,b]$ となるようにとると

$$I(x+h) - I(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，積分の平均値の定理より

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)h \quad \cdots\cdots ②$$



をみたす c が x と $x+h$ の間に存在する（右図の斜線部の面積と太線の長方形の面積が等しくなるときの長方形の高さは関数値で実現できるということ）から，① と ② より

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} = f(c)$$

となる．$h \to 0$ のとき $c \to x$ であるから，$f(x)$ の連続性より

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x) \qquad \blacksquare$$

※ $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ を $f(x)$ の**不定積分**というのが正しい定義であるが，微積分の基本定理は，「連続関数の不定積分は，その関数の原始関数になる」ということを述べているから，連続関数を扱う限りは不定積分と原始関数を区別しない習慣がある．

9．定積分の計算方法

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とし，$f(x)$ の原始関数のひとつを $F(x)$ とする．微積分の基本定理より，$f(x)$ の不定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は $f(x)$ の原始関数であるから，定数 C を用いて

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C \quad \cdots\cdots ①$$

とかける．$\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$ であるから，① において $x = a$ とすると

$$0 = F(a) + C \qquad \therefore \quad C = -F(a)$$

これより

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

となるから，特に $x = b$ とすると

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

となる．積分変数を x に変えれば

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

となるから，連続関数の定積分は原始関数が求められれば計算できることがわかる．

※ $F(b) - F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ または単に $\Big[F(x)\Big]_a^b$ で表すことが多く，定積分の計算では

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

のような書き方をする．

10．置換積分

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とし，$g(t)$ を閉区間 $[\alpha,\beta]$ で微分可能な関数で，その導関数 $g'(t)$ は $[\alpha,\beta]$ で連続であるとする．さらに

$$g(t) \in [a,b] \ (\alpha \leqq t \leqq \beta), \quad g(\alpha) = a, \quad g(\beta) = b$$

であるとき

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

が成り立つ．

証明

$f(x)$ の原始関数のひとつを $F(x)$ とすると

$$\{F(g(t))\}' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

で，$f(g(t))\cdot g'(t)$ は $[\alpha,\beta]$ で連続である．よって，$F(g(t))$ は連続関数 $f(g(t))\cdot g'(t)$ の原始関数のひとつであるから

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt=\big[F(g(t))\big]_\alpha^\beta=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx \qquad \blacksquare$$

※計算するときは，次のように書くとよい．

$x=g(t)$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=g'(t),\qquad \begin{array}{c|ccc} x & a & \to & b \\ \hline t & \alpha & \to & \beta \end{array}$$

であるから

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt$$

11．代表的な置換

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$ などの形のとき

$$\longrightarrow \quad x=a\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right) \text{ で置換}$$

(2) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$ などの形のとき

$$\longrightarrow \quad x=a\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \text{ で置換}$$

(3) $\sqrt{ax+b}$ $(a\neq 0)$ を含むとき

$$\longrightarrow \quad \sqrt{ax+b}=t \text{ で置換}$$

12．部分積分

$f(x),g(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で微分可能な関数で，それらの導関数 $f'(x),g'(x)$ は $[a,b]$ で連続であるとする．このとき

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\big[f(x)g(x)\big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

が成り立つ．

証明

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

で，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ は $[a,b]$ で連続である．よって，$f(x)g(x)$ は連続関数 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ の原始関数のひとつであるから

$$\int_a^b\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx=\big[f(x)g(x)\big]_a^b$$

$f'(x)g(x)$ も $[a,b]$ で連続であるから

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\big[f(x)g(x)\big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx \qquad \blacksquare$$

※ $\displaystyle\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ で原始関数を求めてから定積分の計算をしてもよい．

【基本計算】

C は積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int\left(4x-6+\frac{5}{x}\right)\left(7x-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}\right)dx=\int\left(28x^2-42x+31+\frac{12}{x}-\frac{14}{x^2}+\frac{15}{2x^3}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{28}{3}x^3-21x^2+31x+12\log|x|+\frac{14}{x}-\frac{15}{4x^2}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{x^3-3x^2-9x}{x+2}dx=\int\frac{(x+2)(x^2-5x+1)-2}{x+2}dx=\int\left(x^2-5x+1-\frac{2}{x+2}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+x-2\log|x+2|+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{(3e^{7x}-5e^{-2x})^2}{e^{9x}}dx=\int\frac{9e^{14x}-30e^{5x}+25e^{-4x}}{e^{9x}}dx=\int(9e^{5x}-30e^{-4x}+25e^{-13x})dx$

$\displaystyle=\frac{9}{5}e^{5x}+\frac{15}{2}e^{-4x}-\frac{25}{13}e^{-13x}+C$

(4) $\displaystyle\int\left(\frac{2\tan x}{3}+\frac{5}{2\tan x}\right)^2dx=\int\left(\frac{4}{9}\tan^2x+\frac{10}{3}+\frac{25}{4\tan^2x}\right)dx$

$\displaystyle=\int\left\{\frac{4}{9}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)+\frac{10}{3}+\frac{25}{4}\left(\frac{1}{\sin^2x}-1\right)\right\}dx$

$\displaystyle=\int\left(\frac{4}{9\cos^2x}+\frac{25}{4\sin^2x}-\frac{121}{36}\right)dx=\frac{4}{9}\tan x-\frac{25}{4\tan x}-\frac{121}{36}x+C$

(5) $\displaystyle\int(2\sin5x-3\cos2x+1)^2dx$

$\displaystyle=\int(4\sin^25x+9\cos^22x+1-12\sin5x\cos2x-6\cos2x+4\sin5x)dx$

$\displaystyle=\int\left\{4\cdot\frac{1-\cos10x}{2}+9\cdot\frac{1+\cos4x}{2}+1-12\cdot\frac{1}{2}(\sin7x+\sin3x)-6\cos2x+4\sin5x\right\}dx$

$\displaystyle=\int\left(\frac{15}{2}-2\cos10x+\frac{9}{2}\cos4x-6\sin7x-6\sin3x-6\cos2x+4\sin5x\right)dx$

$\displaystyle=\frac{15}{2}x-\frac{1}{5}\sin10x+\frac{9}{8}\sin4x+\frac{6}{7}\cos7x+2\cos3x-3\sin2x-\frac{4}{5}\cos5x+C$

(6) $\displaystyle\int\frac{5x}{3x^2-1}dx=\frac{5}{6}\int\frac{6x}{3x^2-1}dx=\frac{5}{6}\log|3x^2-1|+C$

(7) $\displaystyle\int\frac{4\sin3x}{6\cos3x-5}dx=\frac{4}{-18}\int\frac{-18\sin3x}{6\cos3x-5}dx=-\frac{2}{9}\log|6\cos3x-5|+C$

(8) $\displaystyle\int\frac{1}{x\log2x}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{\log2x}dx=\log|\log2x|+C$

(9) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\tan x}dx=\log|\tan x|+C$

(10) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{(2-\cos x)(2+\cos x)}dx$

$\displaystyle= \int \frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{2-\cos x} + \frac{\sin x}{2+\cos x}\right)dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{2-\cos x} - \frac{-\sin x}{2+\cos x}\right)dx$

$\displaystyle= \frac{1}{4}\left\{\log(2-\cos x) - \log(2+\cos x)\right\} + C = \frac{1}{4}\log\frac{2-\cos x}{2+\cos x} + C$

(11) $\displaystyle\int x\sqrt{4x^2-3}\,dx = \frac{1}{8}\int (4x^2-3)^{\frac{1}{2}}\cdot 8x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(4x^2-3)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{12}\sqrt{(4x^2-3)^3} + C$

(12) $\displaystyle\int \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-x+7}}dx = -\int (x^2-x+7)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-1)dx = -2(x^2-x+7)^{\frac{1}{2}} + C$

$= -2\sqrt{x^2-x+7} + C$

(13) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(\cos x+2)^3}dx = -\int (\cos x+2)^{-3}\cdot(-\sin x)dx = -\frac{1}{-2}(\cos x+2)^{-2} + C$

$\displaystyle= \frac{1}{2(\cos x+2)^2} + C$

(14) $\displaystyle\int \frac{(3\tan x-7)^4}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{3}\int (3\tan x-7)^4\cdot\frac{3}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3\tan x-7)^5 + C$

$\displaystyle= \frac{1}{15}(3\tan x-7)^5 + C$

(15) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^8 x\sin^2 x}dx = -\int \left(\frac{1}{\tan x}\right)^8\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\tan x}\right)^9 + C$

$\displaystyle= -\frac{1}{9\tan^9 x} + C$

(16) $\displaystyle\int (2\sin^2 x + 5\sin^4 x)\cos^3 x dx = \int (2\sin^2 x + 5\sin^4 x)(1-\sin^2 x)\cos x dx$

$\displaystyle= \int (2\sin^2 x + 3\sin^4 x - 5\sin^6 x)\cos x dx = \int (2\sin^2 x\cdot\cos x + 3\sin^4 x\cdot\cos x - 5\sin^6 x\cdot\cos x)dx$

$\displaystyle= \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{5}{7}\sin^7 x + C$

(17) $\displaystyle\int (1-3\cos^4 x)\sin^5 x dx = \int (1-3\cos^4 x)(1-\cos^2 x)^2\sin x dx$

$\displaystyle= \int (1-2\cos^2 x - 2\cos^4 x + 6\cos^6 x - 3\cos^8 x)\sin x dx$

$\displaystyle= \int \{\sin x + 2\cos^2 x\cdot(-\sin x) + 2\cos^4 x\cdot(-\sin x) - 6\cos^6 x\cdot(-\sin x) + 3\cos^8 x\cdot(-\sin x)\}dx$

$\displaystyle= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{6}{7}\cos^7 x + \frac{1}{3}\cos^9 x + C$

(18)
$$\begin{aligned}\int xe^{-5x}dx &= -\frac{1}{5}xe^{-5x}+\frac{1}{5}\int e^{-5x}dx \\ &= -\frac{1}{5}xe^{-5x}-\frac{1}{25}e^{-5x}+C\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} x & -\dfrac{1}{5}e^{-5x} \\ 1 & e^{-5x}\end{array}$$

(19)
$$\begin{aligned}\int x\cos 2x dx &= \frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} x & \dfrac{1}{2}\sin 2x \\ 1 & \cos 2x\end{array}$$

(20)
$$\begin{aligned}\int x^3\log x dx &= \frac{1}{4}x^4\log x-\frac{1}{4}\int x^3dx \\ &= \frac{1}{4}x^4\log x-\frac{1}{16}x^4+C\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \log x & \dfrac{1}{4}x^4 \\ \dfrac{1}{x} & x^3\end{array}$$

(21)
$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx &= 2\sqrt{x}\log x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= 2\sqrt{x}\log x-4\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \log x & 2\sqrt{x} \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{\sqrt{x}}\end{array}$$

(22)
$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sin^2 x}dx &= -\frac{x}{\tan x}+\int\frac{1}{\tan x}dx \\ &= -\frac{x}{\tan x}+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx \\ &= -\frac{x}{\tan x}+\log|\sin x|+C\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} x & -\dfrac{1}{\tan x} \\ 1 & \dfrac{1}{\sin^2 x}\end{array}$$

(23)
$$\begin{aligned}\int x^2\cos x dx &= x^2\sin x-2\int x\sin x dx \\ &= x^2\sin x-2\left(-x\cos x+\int\cos x dx\right) \\ &= x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x)+C \\ &= x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} x^2 & \sin x \\ 2x & \cos x\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x & -\cos x \\ 1 & \sin x\end{array}$$

(24)
$$\int 3x^2\log(x+1)dx$$
$$=(x^3+1)\log(x+1)-\int(x^2-x+1)dx$$
$$=(x^3+1)\log(x+1)-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$$

$$\begin{array}{cc} \log(x+1) & x^3+1 \\ \dfrac{1}{x+1} & 3x^2\end{array}$$

(25) $\displaystyle\int e^{-4x}\sin 3x dx$

$$
\begin{array}{ccc}
e^{-4x} & & -\dfrac{1}{3}\cos 3x \\
-4e^{-4x} & & \sin 3x
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
e^{-4x} & & \dfrac{1}{3}\sin 3x \\
-4e^{-4x} & & \cos 3x
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3}e^{-4x}\cos 3x - \frac{4}{3}\int e^{-4x}\cos 3x dx \\
&= -\frac{1}{3}e^{-4x}\cos 3x - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}e^{-4x}\sin 3x + \frac{4}{3}\int e^{-4x}\sin 3x dx\right) \\
&= -\frac{1}{3}e^{-4x}\cos 3x - \frac{4}{9}e^{-4x}\sin 3x - \underbrace{\frac{16}{9}\int e^{-4x}\sin 3x dx}_{\text{移項}}
\end{aligned}
$$

であるから

$$\frac{25}{9}\int e^{-4x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{-4x}\cos 3x - \frac{4}{9}e^{-4x}\sin 3x + C'$$

よって

$$
\begin{aligned}
\int e^{-4x}\sin 3x dx &= \frac{9}{25}\left(-\frac{1}{3}e^{-4x}\cos 3x - \frac{4}{9}e^{-4x}\sin 3x\right) + C \\
&= -\frac{3}{25}e^{-4x}\cos 3x - \frac{4}{25}e^{-4x}\sin 3x + C
\end{aligned}
$$

(26) $x = \sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$，$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{1}{2} \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{6} \end{array}$ であるから

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)\right\} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(27) $x - 1 = \sqrt{3}\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$，$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & 4 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{3} \end{array}$ であるから

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2-2x+4}dx = \int_1^4 \frac{1}{(x-1)^2+3}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\big[\,\theta\,\big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

【練習問題 1】
次を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 xe^x dx$

(2) $\displaystyle\int \sin^4 x dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} x\cos 3x dx$

(4) $\displaystyle\int (\sin 3x + \cos 2x)^2 dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x+1}{x^2+1} dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

(7) $\displaystyle\int_{-1}^3 (2x+1)e^{-x} dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{(e^{3x}-4)^2}{e^{4x}} dx$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^4 x\sqrt{x^2+4}\, dx$

(10) $\displaystyle\int (2x^2-7x+5)e^{-2x} dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{\log 4x}{x^2} dx$

(12) $\displaystyle\int \left(x^2-2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{3}{x}\right) dx$

(13) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2-2x+4} dx$

(14) $\displaystyle\int (x-2)e^{-\frac{x}{2}} dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{(e^x+e^{-x})^2}{e^x} dx$

(16) $\displaystyle\int (x-1)\log x dx$

(17) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4x-x^2}\, dx$

(18) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^4}{x} dx$

(19) $\displaystyle\int (\sin x + x\cos x)\log x dx$

(20) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(21) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\log 3x}{x^2} dx$

(22) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2 x} dx$

(23) $\displaystyle\int x^2\cos 3x dx$

(24) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

(25) $\displaystyle\int (\cos 4x + \sin 2x)^3 dx$

(26) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} (x+1)\sqrt{4-x^2}\, dx$

(27) $\displaystyle\int (1+\sin x)^2\cos^3 x dx$

(28) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$

(29) $\displaystyle\int_0^1 (3-2x)\sqrt{1-x^2}\, dx$

(30) $\displaystyle\int x\log(x^2+1) dx$

(31) $\displaystyle\int (x\cos 2x)^2 dx$

(32) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$

(33) $\displaystyle\int_1^3 \left(3-\frac{5}{x}\right)\left(4x^2-1-\frac{2}{x}\right) dx$

(34) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx$

(35) $\displaystyle\int_1^e x^3(\log x)^2dx$

(36) $\displaystyle\int(\sin x + x\cos x)^2dx$

(37) $\displaystyle\int\left(\tan x + \frac{3}{\tan x}\right)^2 dx$

(38) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\sin^2 x dx$

(39) $\displaystyle\int\frac{1}{x\log x}dx$

(40) $\displaystyle\int\frac{\log(x+1)}{x^2}dx$

(41) $\displaystyle\int(2\sin 6x - 3\cos 2x)^2dx$

(42) $\displaystyle\int_0^1\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx$

(43) $\displaystyle\int e^{-3x}\sin 2xdx$

(44) $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x^2-x+1}dx$

(45) $\displaystyle\int_0^{\pi}(x^2-x)\sin\frac{x}{2}dx$

(46) $\displaystyle\int x^2\sin^2 xdx$

(47) $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{\sqrt{x}}dx$

(48) $\displaystyle\int(2\sin 5x - 3\cos 3x)^2dx$

(49) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(2\tan x - \frac{3}{\tan x}\right)^2 dx$

(50) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\log 3}\frac{e^{2x}}{(e^x+e^{-x})^2}dx$ 　($t = e^x$ で置換)

(51) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-2x}\cos 3xdx$

(52) $\displaystyle\int x^2\log(x-1)dx$

(53) $\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^3}dx$

(54) $\displaystyle\int_0^2\frac{(e^{3x}-3)^2}{e^{2x}}dx$

(55) $\displaystyle\int(1-2\sin x)^2\cos^3 xdx$

(56) $\displaystyle\int(2\sin 7x - 5\cos 3x)^2dx$

(57) $\displaystyle\int\frac{x}{\sin^2 2x}dx$

(58) $\displaystyle\int e^{-x}\cos 2xdx$

(59) $\displaystyle\int\frac{1}{1-\sin x}dx$

(60) $\displaystyle\int\log(x+\sqrt{x^2+1})dx$

(61) $\displaystyle\int_2^5(3x+2)\sqrt{x-1}dx$

(62) $\displaystyle\int_1^2 x\log(x+1)dx$

(63) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 xdx$

(64) $\displaystyle\int\frac{1}{4x^2-1}dx$

(65) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin xdx$

(66) $\displaystyle\int_{\log 3}^{\log 5}(e^x+e^{-x})dx$

(67) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx$

(68) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x - \frac{1}{2}\right|dx$

(69) $\displaystyle\int_1^2 x^4\log xdx$

(70) $\displaystyle\int_0^1\frac{3x^4+8x^3}{x^2+1}dx$

(71) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{8}\pi}(4x\sin 4x+4x)dx$

(72) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx$

(73) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\log x|dx$

(74) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}\,dx$

(75) $\displaystyle\int\frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2}dx$

(76) $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x dx$

(77) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+8x}\,dx$

(78) $\displaystyle\int(x-1)e^{3x-1}dx$

(79) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

(80) $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\sqrt{9-x^2}\,dx$

(81) $\displaystyle\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$

(82) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{(\log x)^2}{x}dx$

(83) $\displaystyle\int_0^{2\pi}(1-\cos x)^3dx$

(84) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x}{\cos x}\right)^2dx$

(85) $\displaystyle\int_2^3(2x-7)\sqrt{4x-x^2}\,dx$

(86) $\displaystyle\int_2^4\frac{2x+1}{x^2-4x+8}dx$

(87) $\displaystyle\int_{\frac{e}{2}}^{e}(-x\log x+x)dx$

(88) $\displaystyle\int_0^{\pi}|3\cos 2x+7\cos x|dx$

(89) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,dx$

(90) $\displaystyle\int_2^7\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

(91) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+3x+2}dx$

(92) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi}x(\sin x+\cos x)dx$

(93) $\displaystyle\int_1^e(\log x)^2dx$

(94) $\displaystyle\int_0^2\frac{3x+7}{x^2+4x+3}dx$

(95) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-3x)^2dx$

(96) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x-1\right|dx$

(97) $\displaystyle\int_2^3\frac{x^3+3x^2-2x+4}{x^2}dx$

(98) $\displaystyle\int_1^2\frac{\log x}{x^2}dx$

(99) $\displaystyle\int_{-3}^{\sqrt{3}}\frac{1}{9+x^2}dx$

(100) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\sqrt{5-x^2}\,dx$

(101) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\tan^2 x dx$

(102) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1+2x}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}}dx$

(103) $\displaystyle\int_1^e x^2\log x dx$

(104) $\displaystyle\int(\sin x+\cos x)^4dx$

(105) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$

(106) $\displaystyle\int \tan^3 x dx$

(107) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}dx$

(108) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

(109) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^3 dx$

(110) $\displaystyle\int_0^\pi |\sqrt{1+\cos 2x}-\sqrt{1-\cos 2x}|dx$

(111) $\displaystyle\int_e^{2e} x(\log x - 1)dx$

(112) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}dx$

(113) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

(114) $\displaystyle\int_{1+\frac{1}{e^2}}^2 \left(-x+2+\frac{2}{e^2}-xe^{-x}\right)dx$

(115) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x^3}dx$

(116) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx$

(117) $\displaystyle\int_0^\pi xe^x \sin x dx$

(118) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\cos^2 x-\sin^2 x}dx$

§10.　定積分と最大最小

【問題 10.1】
次の問いに答えよ．

(1) m を自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin mx dx$ の値を求めよ．

(2) m, n を自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$ の値を求めよ．

(3) a, b を実数とする．定積分 $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x - a\sin x - b\sin 2x)^2 dx$ を計算せよ．

(4) (3) において，a, b を変化させたときの I の最小値，およびそのときの a, b の値を求めよ．

（2002　お茶の水女子大）

【問題 10.2】
(1) 定積分 $I = \displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x \cos x dx$ と $J = \displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x \sin x dx$ の値を求めよ．

(2) 実数 a, b が $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (a\cos x + b\sin x)^2 dx = 1$ をみたしながら動くとき

$\displaystyle\int_{0}^{\pi} (e^x - a\cos x - b\sin x)^2 dx$ の最大値を求めよ．

（2011　富山大）

【問題 10.3】
x の関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = \int_{1}^{2} |\log t - \log x| dt \quad (x > 0)$$

によって定義する．ただし，対数は自然対数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(1)$ および $f(2)$ の値を求めよ．

(2) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき，積分を実行して $f(x)$ を x の式で書け．

(3) $1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値およびそれぞれのときの x の値を求めよ．ここで，必要ならば自然対数の底 e が $2.7 < e < 2.8$ を満たすことを用いてよい．

（2004　東京理科大）

【問題 10.4】
(1) $0 < x < \pi$ のとき，$\sin x - x\cos x > 0$ を示せ．

(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_{0}^{\pi} |\sin x - ax| dx$ $(0 < a < 1)$ を最小にする a の値を求めよ．

（2010　横浜国立大）

【問題 10.5】

$f(x) = 1 - \cos x - x\sin x$ とする．

(1) $0 < x < \pi$ において，$f(x) = 0$ は唯一の解を持つことを示せ．

(2) $J = \displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|dx$ とする．(1) の唯一の解を α とするとき，J を $\sin\alpha$ の式で表せ．

(3) (2) で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ．

（2010　東京工業大）

【問題 10.6】

(1) 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi - x) = f(x)$ をみたすとき，

$$\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x)dx = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{4 - \cos^2 x}dx$ を求めよ．

（2005　名古屋大）

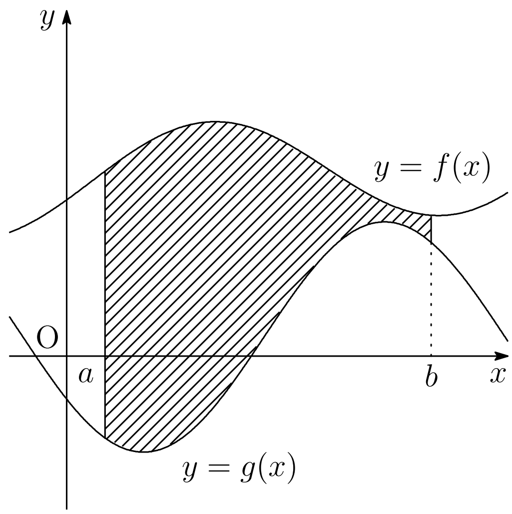
§11.　面積

1．面積

(1) $y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b$ で囲まれた図形が右図のようなとき，囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

で与えられる．



(2) $y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b$ で囲まれた図形が右図のようなとき，$x=c$ の左側と右側では $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の大小が変わるので，囲まれた図形の面積 S は

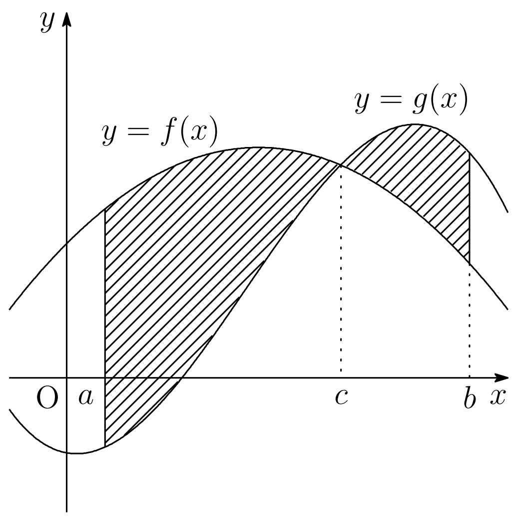
$$S=\int_a^c\{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b\{g(x)-f(x)\}dx$$

で与えられる．

※右辺は

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

と表すことができるが，計算するときは絶対値をはずさないといけない．



【問題 11.1】
xy 平面において，曲線 $y = x\log\dfrac{x+1}{x^2+1}$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

（2004　奈良県立医科大）

【問題 11.2】
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ とし，また実数 a, b について $g(x) = e^{-ax+b}$ とおく．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ において常に $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つために a, b が満たすべき条件を求めよ．

(2) $y = g(x)$ のグラフが点 $(1, 1)$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように a, b を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする．同様に $y = g(x)$ のグラフが点 $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように a, b を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする．このとき，$y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ の交点を求めよ．

(3) (2) で定めた $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ と $y = f(x)$ の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ．

（2009　千葉大）

【問題 11.3】
a, b を実数とする．2 つの関数

$$f(x) = \log(x^2+1), \quad g(x) = ax^2 + b$$

について次の問に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極値，曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求め，そのグラフの概形をかけ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ．

(3) (2) の条件において，$a = \dfrac{1}{4}$, $b \neq 0$ のとき，この 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

（岡山大）

【問題 11.4】
曲線 $C : y = xe^{-x}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の接線で点 $(1, a)$ を通るものがちょうど 2 本存在するような a の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた a のうち最大のものを a_0 とする．点 $(1, a_0)$ を通る曲線 C の接線のうち，傾きが負になるものを l とするとき，曲線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

（2009　京都府立医科大）

【問題 11.5】
曲線 $y = \cos x$ と，点 $(t, \cos t)$ $\left(\text{ただし } 0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ におけるこの曲線の接線ではさまれ，x 座標が $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の最小値と最大値を求めよ．

（2004　東京海洋大）

【問題 11.6】
xy 平面において 2 つの曲線 $C_1 : x^2+y^2=1,\ C_2 : y=2\sqrt{x-1}\ (x \geqq 1)$ を考える．次に，C_2 の点 $(a, 2\sqrt{a-1})$ における接線を l とする．ただし，$a=1$ のとき，接線 l は直線 $x=1$ とする．

(1) 接線 l と円 C_1 が共有点をもつような a の範囲を求めよ．

(2) a が (1) で求めた範囲にあるとき，接線 l と円 C_1 の共有点を P, Q とする．ただし，共有点が 1 点の場合は $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ とする．このとき，線分 PQ の中点 M の軌跡 C の方程式を求めよ．

(3) 軌跡 C と円 C_1 に囲まれ，点 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ を含む図形の面積を求めよ．

（2009　埼玉大）

【問題 11.7】
曲線 $y=e^{-x}$ と $y=e^{-x}|\cos x|$ で囲まれた図形のうち，$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ をみたす部分の面積を a_n とする（$n=1,2,3,\ldots$）．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int e^{-x}\cos x dx = e^{-x}(p\sin x + q\cos x) + C$ をみたす定数 p, q を求めよ．ただし，C は積分定数である．

(2) a_1 の値を求めよ．

(3) a_n の値を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ．

（2007　早稲田大）

【問題 11.8】
座標平面において，媒介変数 t を用いて $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=t\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ．

（2008　東京大）

【問題 11.9】
中心が原点 O で半径 2 の円を C_1 とし，C_1 上に 2 点 $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{B}(-2,0)$ をとる．半径 1 の円 C_2 は，最初に中心 Q が点 $(3,0)$ にあり，C_1 に外接しながら滑ることなく反時計回りに転がるものとする．点 P は C_2 上に固定されていて，最初は A の位置にある．P が B に達するまでに描く曲線を C とする．

(1) x 軸と線分 OQ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，P の座標を θ を用いて表し，C の概形をかけ．

(2) C と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

【問題 11.10】
中心が原点 O で半径 3 の円を C_1 とし，C_1 上に点 A$(3,0)$ をとる．半径 1 の円 C_2 は，最初に中心 Q が点 $(2,0)$ にあり，C_1 に内接しながら滑ることなく反時計回りに転がるものとする．点 P は C_2 上に固定されていて，最初は A の位置にある．P が再び A に達するまでに描く曲線を C とする．

(1) x 軸と線分 OQ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とするとき，P の座標を θ を用いて表し，C の概形をかけ．

(2) C で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

【問題 11.11】
半径 10 の円 C がある．半径 3 の円板 D を，円 C に内接させながら，円 C の円周に沿って滑ることなく転がす．円板 D の周上の一点を P とする．点 P が，円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は，円 C を 2 つの部分に分ける．それぞれの面積を求めよ．

（2004　東京大）

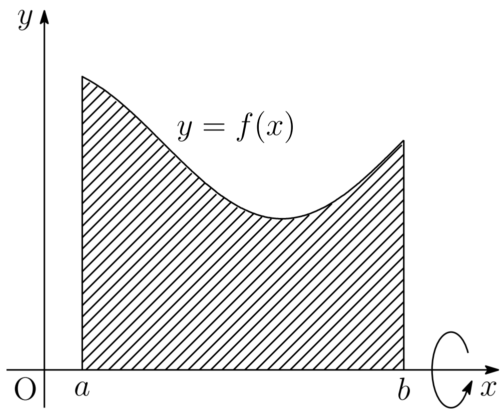
§12.　体積

1. 回転体の体積

$y=f(x)$，x 軸，$x=a$，$x=b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は

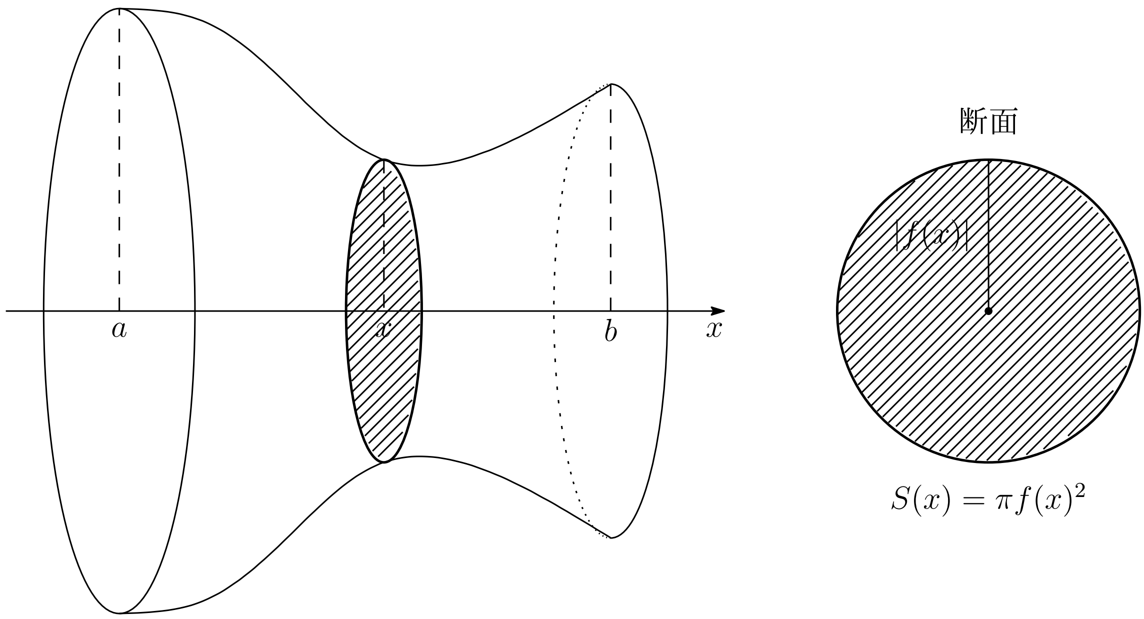
$$V=\pi\int_a^b f(x)^2dx$$

で与えられる．



※回転体の体積 V は，断面積 $S(x)$ を積分すればよい．

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b f(x)^2dx$$



【問題 12.1】

連立不等式 $\begin{cases} x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq 1 \\ y \geqq 0 \end{cases}$ の表す図形を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ．

（2008　横浜国立大）

【問題 12.2】

xy 平面において，曲線 $y=\cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$，および 2 直線 $x=0$, $x=\pi$ で囲まれた 2 つの部分からなる図形を A とする．

(1) A の面積を求めよ．

(2) A を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

（2007　広島市立大）

【問題 12.3】

線分 l，曲線 C を $l: y=\dfrac{2}{\pi}x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$, $C: y=\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．線分 l と曲線 C とで囲まれた図形を x 軸を中心に 1 回転してできる立体の体積を V，y 軸を中心に 1 回転してできる立体の体積を W とする．このとき，V と W の値を求め，V と W の大小関係を判定せよ．

（2007　奈良県立医科大・設問省略）

【問題 12.4】

座標空間において，原点 $(0,0,0)$ を中心とし，xy 平面に含まれる半径 1 の円 C を考える．そして，xy 平面の上側に，この円 C を底面とする高さ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の直円柱 D を考える．また，点 $(-1,0,0)$ を通り，y 軸に平行な直線を l とする．直線 l を含み，xy 平面と 30° で交わる平面 α により，この直円柱 D が二つの部分に分けられているとする．このとき，これらの部分のうち，α の下側の部分を M として次の問に答えよ．

(1) 点 $(s,0,0)$（ただし，$-1<s<1$）を通り yz 平面に平行な平面と，M との共通部分は長方形となるが，その面積を s を用いて表せ．

(2) 立体 M の体積を求めよ．

（2004　東京理科大）

【問題 12.5】

$0 \leqq t \leqq 1$ とする．空間において，平面 $x=t$ 上にあり，連立不等式

$$y^2 \leqq 1-t^2, \quad z \geqq 0, \quad z \leqq 2t, \quad z \leqq -2t+2$$

をみたす点 (t,y,z) 全体からなる図形の面積を $S(t)$ とする．また，t が 0 から 1 まで動くとき，この図形が通過してできる立体の体積を V とする．

(1) $S(t)$ を求めよ．

(2) V の値を求めよ．

（2013　神戸大）

【問題 12.6】
xy 平面において，曲線 $C: y = \sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と直線 $l: y = t\ (0 \leqq t < 1)$ の交点を A,B とし，C と l で囲まれた部分を線分 AB を軸として 90° 回転させ xyz 空間の $z \geqq 0$ の部分に移したものを D とする．t を $0 \leqq t < 1$ の範囲で動かしたとき，D が通過してできる立体の体積 V を求めよ．

【問題 12.7】
D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする．D がつぎの条件 (a),(b) を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ．
(a) D の中心は C 上にある．
(b) D が乗っている平面は常にベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交する．

（2005　東京工業大）

【問題 12.8】
r を正の実数とする．xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leqq r^2, \quad y^2 + z^2 \geqq r^2, \quad z^2 + x^2 \leqq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ．

（2005　東京大）

【問題 12.9】
放物線 $y = x^2 - x$ と直線 $y = x$ との原点 O 以外の交点を A とする．この直線と放物線によって囲まれる部分を，直線 OA を軸として回転して得られる立体の体積を求めよ．

（青山学院大）

【問題 12.10】
座標空間内で，$\mathrm{O}(0,0,0), \mathrm{A}(1,0,0), \mathrm{B}(1,1,0), \mathrm{C}(0,1,0), \mathrm{D}(0,0,1), \mathrm{E}(1,0,1), \mathrm{F}(1,1,1), \mathrm{G}(0,1,1)$ を頂点にもつ立方体を考える．この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

（2010　京都大）

【問題 12.11】
座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,1,0),\ \mathrm{B}(1,1,0),\ \mathrm{C}(1,-1,0),\ \mathrm{D}(-1,-1,0)$ とする．正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする．

(1) $0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ．

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ．

（2013　東京大）

メモ

§13.　積分漸化式

【問題 13.1】

(1) $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3n}}{x^3+1}dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ とするとき，$I_n - I_{n+1}$ を求めよ．

(2) $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta + \dfrac{1}{2}$ とおいて $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1}$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ の和を求めよ．

（2000　徳島大）

【問題 13.2】

$I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{x^2+1}dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) I_0 の値を求めよ．

(2) $I_n - I_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ の値を求めよ．

(3) $\dfrac{x^{2n}}{x^2+1} \leqq x^{2n}$ を用いて，不等式 $|I_n| \leqq \dfrac{1}{2n+1} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ を示せ．

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ の和を求めよ．

（2006　電気通信大）

【問題 13.3】

自然数 n に対して $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2n}dx$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ．

（2009　北海道大）

【問題 13.4】

n を自然数とする．

(1) 実数 x に対して，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2}$ を求めよ．

(2) 不等式 $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right| \leqq \dfrac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ を求めよ．

（2002　東京工業大）

【問題 13.5】

関数 $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\dots)$ を $f_n(x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-x^2)^k$ と定める．次の問いに答えよ．

(1) $0<x<1$ である x について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{1+x^2}$ を計算せよ．

(3) $n=1,2,3,\dots$ に対して次の不等式が成立することを示せ．

$$0<\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(f_n(x)-\frac{1}{1+x^2}\right)dx<\frac{1}{4n+3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4n+3}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f_n(x)dx=\frac{1}{\sqrt{3}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}$ が成立することを示せ．

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ を計算せよ．

（2010　同志社大）

【問題 13.6】

自然数 n に対し $S_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx,\ T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$ とおく．このとき以下の各問いに答えよ．

(1) 次の不等式を示せ．

$$\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$$

(2) T_n-2S_n を n を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ．

（2011　東京医科歯科大）

【問題 13.7】

次の式 $x_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$　$(n=0,1,2,\dots)$ によって定義される数列 $\{x_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 漸化式 $x_n=\dfrac{n-1}{n}x_{n-2}$　$(n=2,3,4,\dots)$ を示せ．

(2) $x_n\cdot x_{n-1}$ の値を求めよ．

(3) 不等式 $x_n>x_{n+1}$　$(n=0,1,2,\dots)$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n{x_n}^2$ を求めよ．

（2002　名古屋市立大）

【問題 13.8】

n を自然数とし，$I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$ とおく．

(1) I_n と I_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) すべての n に対して，不等式

$$\frac{e}{n+2} < I_n < \frac{e}{n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(nI_n - e)$ を求めよ．

（2001　大分医科大）

メモ

§14.　区分求積，Σ と積分

【問題 14.1】
自然数 n に対して

$$x^{n(n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\left(1+\frac{3}{n}\right)^3\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^n$$

となる正の数 x を a_n とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

（1997　群馬大）

【問題 14.2】
(1) 0 以上の整数 $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，$I(m,n)$ を $I(m,n) = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ で定める．$I(m,n)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ を区間 $[0,1]$ で定義された連続関数とする．自然数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，多項式 $P_n(x)$ を $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$ で定める．ここで，${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ である．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 P_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ となることを示しなさい．

（2010　東京理科大・誘導省略）

【問題 14.3】
1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の辺 BC を n 等分する分点を順に $\mathrm{B} = \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}$, $\mathrm{P}_n = \mathrm{C}$ とする．また，三角形 $\mathrm{AP}_{i-1}\mathrm{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の面積を S_i とする．

(1) a を正の定数とするとき，次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{AP}_{i-1}+\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i+\mathrm{AP}_i)S_i$ を求めよ．ただし，平面上の 2 点 P, Q を結ぶ線分の長さを PQ で表す．

（2007　早稲田大）

【問題 14.4】
座標平面上の点 (x, y) で x と y がともに整数であるものを格子点とよぶ．いま $n \geqq 2$ である整数 n に対して，3 つの条件 $x^2+y^2 < n^2$, $x > 0$, $y > 0$ をみたす格子点 (x, y) の総数を $P(n)$ で表す．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sqrt{n^2-k^2}-1\right) \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2}$ が成り立つことを示しなさい．

(2) 等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2} = \frac{\pi}{4}$ が成り立つことを示しなさい．

（2007　首都大学東京）

【問題 14.5】

$a_n = \int_1^e x(\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数とし，その底を e とする．

(1) a_1 の値を求めよ．

(2) a_{n+1} および a_{n+2} を a_n を用いて表せ．

(3) (2) の結果と $a_{n+1} > 0$, $a_{n+2} > 0$ であることを用いて，不等式

$$\frac{ne^2}{(n+1)(n+2)} < a_n < \frac{e^2}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ．

(4) 極限値 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right)$ を求めよ．

(5) $S_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n-1}$ とおくとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

（2005　電気通信大）

【問題 14.6】

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} (\log k)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める．次の問に答えよ．

(1) 不定積分 $\int (\log x)^2 dx$ を求めよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n(\log n)^2}$ を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{3n}}{a_{2n}}$ を求めよ．

（2005　横浜国立大）

【問題 14.7】

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

(2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ．

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

（2010　東京大）