$\boxed{1}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ $(0°<\theta<180°)$ のとき，$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{^{\text{ア}}\boxed{\quad}}{^{\text{イ}}\boxed{\quad}}$ であり，

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{^{\text{ウ}}\boxed{\quad}}{^{\text{エ}}\boxed{\quad}}$ であり，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{^{\text{オ}}\boxed{\quad}}}{^{\text{カ}}\boxed{\quad}}$ である。

解説

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{^{\text{ア}}3}{^{\text{イ}}8}$

このとき

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{^{\text{ウ}}11}{^{\text{エ}}16}$$

さらに

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$$

$0°<\theta<180°$ のとき $\sin\theta>0$ であり，また，$\sin\theta\cos\theta<0$ から　　$\cos\theta<0$

よって　　$\sin\theta-\cos\theta>0$

したがって　　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{^{\text{オ}}7}}{^{\text{カ}}2}$

$\boxed{2}$

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ $(0°<\theta<90°)$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ および $\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めよ.

解説

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ から　$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

よって　$\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$　　　すなわち　$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

このとき　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$

$$=1+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}$$

$0°<\theta<90°$ であるから　$\sin\theta+\cos\theta>0$

したがって　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{3}$

$0°<\theta<180°$，$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sqrt{2}$ であるとき，$\tan\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

解説

$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sqrt{2}$ から　　$\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=\sqrt{2}$

ゆえに　　$\tan\theta+1=\sqrt{2}(\tan\theta-1)$　　　よって　　$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$

また，$\left(\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right)^2=(\sqrt{2})^2$ から　　$\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{1-2\sin\theta\cos\theta}=2$

ゆえに　　$1+2\sin\theta\cos\theta=2(1-2\sin\theta\cos\theta)$

したがって　　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{6}$

4

$\sin\theta > \cos\theta$ かつ $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{7}{5}$ が成り立つとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

解説

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{7}{5}$ の両辺を 2 乗すると　$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{49}{25}$

ゆえに　$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{49}{25}$

すなわち　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{12}{25}$

よって，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は t の 2 次方程式 $t^2 - \dfrac{7}{5}t + \dfrac{12}{25} = 0$ の 2 つの解である。

$t^2 - \dfrac{7}{5}t + \dfrac{12}{25} = 0$ を解くと　$t = \dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$

したがって，$\sin\theta > \cos\theta$ より　$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$，$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$

5

$\triangle$ABC において，AB$=7$，BC$=5$，CA$=9$ とする。このとき，$\cos A = ^{ア}\boxed{}$，$\sin A = ^{イ}\boxed{}$ である。また，$\triangle$ABC の面積は $^{ウ}\boxed{}$，外接円の半径は $^{エ}\boxed{}$ であり，内接円の半径は $^{オ}\boxed{}$ である。

解説

余弦定理から　$\cos A = \dfrac{7^2 + 9^2 - 5^2}{2\cdot 7\cdot 9} = ^{ア}\dfrac{5}{6}$

よって，$\sin^2 A = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{11}{36}$，$\sin A > 0$ から

$$\sin A = ^{イ}\dfrac{\sqrt{11}}{6}$$

また，$\triangle$ABC の面積 S は

$$S = \dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 9\cdot \dfrac{\sqrt{11}}{6} = ^{ウ}\dfrac{21\sqrt{11}}{4}$$

外接円の半径 R は，正弦定理から

$$R = \dfrac{1}{2}\cdot 5 \div \dfrac{\sqrt{11}}{6} = ^{エ}\dfrac{15\sqrt{11}}{11}$$

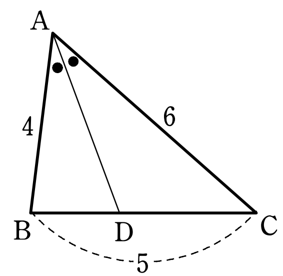
内接円の半径 r は，$\dfrac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})r = S$ から

$$r = \dfrac{21\sqrt{11}}{4} \div \dfrac{21}{2} = ^{オ}\dfrac{\sqrt{11}}{2}$$

6

$\triangle$ABC において，AB$=4$，BC$=5$，CA$=6$ とする。また，$\angle$A の二等分線が辺 BC と交わる点を D とする。このとき，AD の長さを求めよ。

解説



$\triangle$ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle \mathrm{B} = \dfrac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2\cdot 4\cdot 5} = \dfrac{1}{8}$$

AD は $\angle$A の二等分線であるから

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 4 : 6 = 2 : 3$$

よって　$\mathrm{BD} = \dfrac{2}{2+3}\mathrm{BC} = \dfrac{2}{5}\cdot 5 = 2$

$\triangle$ABD において，余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos\angle\mathrm{B}\\ &= 4^2 + 2^2 - 2\cdot 4\cdot 2\cdot \dfrac{1}{8} = 18\end{aligned}$$

$\mathrm{AD} > 0$ であるから　$\mathrm{AD} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

7

$\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{A} = 60°$，$\angle$A の二等分線が辺 BC と交わる点を D とする。

AB＝7，AC＝5 のとき AD＝$\boxed{}$ となる。

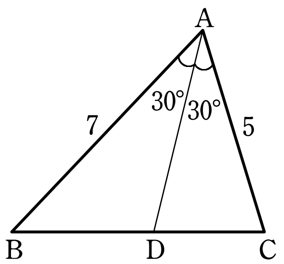
(解説)

△ABC＝△ABD＋△ADC であるから

$$\frac{1}{2}\cdot7\cdot5\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot7\cdot\mathrm{AD}\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot5\cdot\mathrm{AD}\sin30^\circ$$

よって　$\dfrac{35\sqrt{3}}{4}=3\mathrm{AD}$

ゆえに　$\mathrm{AD}=\dfrac{35\sqrt{3}}{12}$



$\boxed{8}$

△ABC の 3 つの角 A，B，C に対して，$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ であるとき，

$\tan A=$ ア$\boxed{}$ であり，角 C の大きさをラジアンで求めると $C=$ イ$\boxed{}$ である。

(解説)

正弦定理から　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

よって　$a:b:c=3:5:7$

ゆえに，$a=3k$，$b=5k$，$c=7k$ $(k>0)$ とおくと

$$\cos A=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(3k)^2}{2\cdot5k\cdot7k}=\frac{65k^2}{70k^2}=\frac{13}{14}$$

$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

したがって　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=$ ア $\dfrac{3\sqrt{3}}{13}$

また　$\cos C=\dfrac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot3k\cdot5k}=\dfrac{-15k^2}{30k^2}=-\dfrac{1}{2}$

$0<C<\pi$ であるから　$C=$ イ $\dfrac{2}{3}\pi$

$\boxed{9}$

円 O に内接する四角形 ABCD において，$\angle\mathrm{ADC}=\theta$ とする。

AB＝2，BC＝3，CD＝4，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　対角線 AC と辺 AD の長さを求めよ。
(2)　対角線 BD の長さを求めよ。
(3)　円 O の半径 R を求めよ。
(4)　四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

(解説)

(1)　四角形 ABCD は円に内接するから　$\angle\mathrm{ABC}=180^\circ-\theta$

△ABC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}\\&=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos(180^\circ-\theta)\\&=4+9+12\cos\theta=13+12\cdot\frac{1}{4}=16\end{aligned}$$

AC＞0 であるから　AC＝4

△ACD に余弦定理を用いると

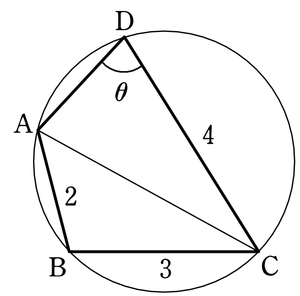
$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{CD}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{ADC}$$

よって　$4^2=4^2+\mathrm{AD}^2-2\cdot4\cdot\mathrm{AD}\cos\theta$

$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ を代入して整理すると

$$\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AD}=0\quad\text{すなわち}\quad\mathrm{AD}(\mathrm{AD}-2)=0$$

AD＞0 であるから　AD＝2



別解　△ACD は AC＝CD の二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AD}=\mathrm{CD}\cos\theta\times2=4\cdot\frac{1}{4}\times2=2$$

(2)　$\angle\mathrm{BAD}=\alpha$ とすると　$\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-\alpha$

△ABD に余弦定理を用いると

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD$$
$$=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos\alpha=8-8\cos\alpha \quad \cdots\cdots ①$$

△BCD に余弦定理を用いると

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$$
$$=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos(180^\circ-\alpha)=25+24\cos\alpha \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$8-8\cos\alpha=25+24\cos\alpha$

したがって　$\cos\alpha=-\dfrac{17}{32}$　① に代入すると　$BD^2=\dfrac{49}{4}$

$BD>0$ であるから　$BD=\dfrac{7}{2}$

別解　四角形 ABCD は円に内接するから，次のトレミーの定理が成り立つ。

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD$$

よって，$2\cdot4+3\cdot2=4\cdot BD$ から　$BD=\dfrac{7}{2}$

(3)　$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

△ACD に正弦定理を用いると　$\dfrac{AC}{\sin\theta}=2R$

よって　$R=\dfrac{AC}{2\sin\theta}=\dfrac{4}{2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$

(4)　$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

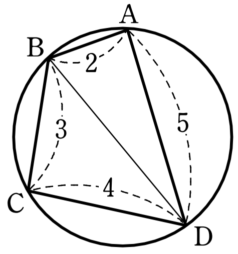
$$=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin(180^\circ-\theta)+\frac{1}{2}CD\cdot AD\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin\theta=7\sin\theta=\frac{7\sqrt{15}}{4}$$

10

円に内接する四角形 ABCD において，AB＝2，BC＝3，CD＝4，DA＝5 とする。
このとき，cos∠BCD，四角形 ABCDの面積を求めよ。

解説

△BCD に余弦定理を適用して



$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$$
$$=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos\angle BCD$$
$$=25-24\cos\angle BCD \quad \cdots\cdots ①$$

△ABD に余弦定理を適用して

$$BD^2=AB^2+DA^2-2AB\cdot DA\cos\angle BAD$$
$$=2^2+5^2-2\cdot2\cdot5\cos(180^\circ-\angle BCD)$$
$$=29+20\cos\angle BCD \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$25-24\cos\angle BCD=29+20\cos\angle BCD$

よって　$\cos\angle BCD=-\dfrac{1}{11}$

$\sin\angle BCD>0$ であるから

$$\sin\angle BCD=\sqrt{1-\cos^2\angle BCD}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{11}\right)^2}=\frac{2\sqrt{30}}{11}$$

また　$\sin\angle BAD=\sin(180^\circ-\angle BCD)=\sin\angle BCD=\dfrac{2\sqrt{30}}{11}$

よって

(四角形 ABCD の面積)＝△ABD＋△BCD

$$=\frac{1}{2}AB\cdot DA\sin\angle BAD+\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot5\cdot\frac{2\sqrt{30}}{11}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{30}}{11}=2\sqrt{30}$$