1

1 桁の自然数全体からなる集合を全体集合 U とする。U の部分集合 A, B が

$A\cap B=\{1,\ 9\}$, $\overline{A}\cap B=\{6,\ 8\}$, $\overline{A\cup B}=\{2,\ 4,\ 7\}$ を満たすとすると，$A=$ ア$\boxed{}$,

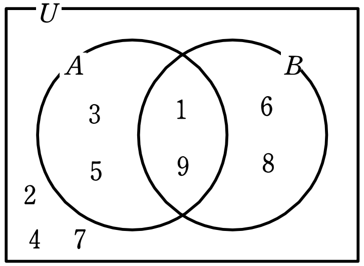
$B=$ イ$\boxed{}$ である。ただし，$\overline{A}$ で A の補集合を表すものとする。

解説

全体集合 U の要素は，U の部分集合である

$A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$, $A\cap B$, $\overline{A\cup B}$

のいずれか 1 つのみに属する。



よって　　$A\cap\overline{B}=\{3,\ 5\}$

A は $A\cap B$ と $A\cap\overline{B}$ の和集合であるから

$A=$ ア$\{1,\ 3,\ 5,\ 9\}$

また，B は $A\cap B$ と $\overline{A}\cap B$ の和集合であるから

$B=$ イ$\{1,\ 6,\ 8,\ 9\}$

2

1 から 16 までの自然数を要素とする集合を全体集合 U とし，U の部分集合を

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 14,\ 15\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 12,\ 14\}$,

$C=\{2,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12\}$ とする。このとき，次の集合の要素を求めよ。

$A\cap B\cap C=\{$ア$\boxed{}$, イ$\boxed{}\}$, $A\cap\overline{B\cup C}=\{$ウ$\boxed{}$, エ$\boxed{}$, オ$\boxed{}\}$,

$\overline{A}\cap B\cap C=\{$カ$\boxed{}$, キ$\boxed{}\}$, $(\overline{A\cup C}\cap B)\cup(A\cap C\cap\overline{B})=\{$ク$\boxed{}$, ケ$\boxed{}\}$,

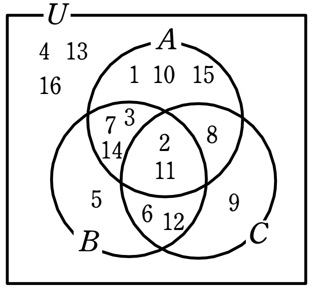
$(A\cap\overline{B\cup C})\cup(B\cap\overline{C\cup A})\cup(C\cap\overline{A\cup B})$

$=\{$コ$\boxed{}$, サ$\boxed{}$, シ$\boxed{}$, ス$\boxed{}$, セ$\boxed{}\}$

ただし，ア$\boxed{}<$ イ$\boxed{}$, ウ$\boxed{}<$ エ$\boxed{}<$ オ$\boxed{}$, カ$\boxed{}<$ キ$\boxed{}$,

ク$\boxed{}<$ ケ$\boxed{}$, コ$\boxed{}<$ サ$\boxed{}<$ シ$\boxed{}<$ ス$\boxed{}<$ セ$\boxed{}$ となるように記入せよ。

解説



$A\cap B\cap C=\{$ア$2,$ イ$11\}$

また，ド・モルガンの法則により $\overline{B\cup C}=\overline{B}\cap\overline{C}$ である

から　　$A\cap\overline{B\cup C}=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\{$ウ$1,$ エ$10,$ オ$15\}$

また　　$\overline{A}\cap B\cap C=\{$カ$6,$ キ$12\}$

$\overline{A\cup C}\cap B=\overline{A}\cap\overline{C}\cap B=\{5\}$, $A\cap C\cap\overline{B}=\{8\}$ であるから

$(\overline{A\cup C}\cap B)\cup(A\cap C\cap\overline{B})=\{$ク$5,$ ケ$8\}$

さらに，

$A\cap\overline{B\cup C}=\{1,\ 10,\ 15\}$, $B\cap\overline{C\cup A}=B\cap\overline{C}\cap\overline{A}=\{5\}$,

$C\cap\overline{A\cup B}=C\cap\overline{A}\cap\overline{B}=\{9\}$

であるから　　$(A\cap\overline{B\cup C})\cup(B\cap\overline{C\cup A})\cup(C\cap\overline{A\cup B})=\{$コ$1,$ サ$5,$ シ$9,$ ス$10,$ セ$15\}$

3

集合 A, B は，A$=\{x\mid x^2-2x-3\leqq 0\}$, B$=\{x\mid x^2-5x+4>0\}$ である．ただし，x は整数とする．このとき，集合 A に含まれる x の個数は ア$\boxed{}$, 集合 A∩B に含まれる x の個数は イ$\boxed{}$ である．また，集合 A∪$\overline{\text{B}}$ に含まれる x の個数は ウ$\boxed{}$ である．

ただし，全体集合は整数全体の集合とする．

解説

$x^2-2x-3\leqq 0$ から　$(x+1)(x-3)\leqq 0$　　よって　$-1\leqq x\leqq 3$ …… ①

x は整数であるから，集合 A に含まれる x の個数は ア5

$x^2-5x+4>0$ から　$(x-1)(x-4)>0$　　よって　$x<1,\ 4<x$ …… ②

①, ② から　　A∩B$=\{x\mid -1\leqq x<1\}$

x は整数であるから，集合 A∩B に含まれる x の個数は イ2

また，集合 $\overline{\text{B}}$ は，$(x-1)(x-4)\leqq 0$ から　　$\overline{\text{B}}=\{x\mid 1\leqq x\leqq 4\}$

よって　　A∪$\overline{\text{B}}=\{x\mid -1\leqq x\leqq 4\}$

x は整数であるから，集合 $A\cup\overline{B}$ に含まれる x の個数は ウ6

4

全体集合 U を実数全体の集合として，U の部分集合 A，B，C を

$A=\{x \mid |4-3x|\leqq 5\}$，$B=\{x \mid x^2-x-2\leqq 0\}$，$C=\{x \mid x\geqq 0\}$ により定める。

A の要素 x がとり得る値の範囲は ア$\boxed{\quad}$，$A\cup B$ の要素 x がとり得る値の範囲は イ$\boxed{\quad}$，$\overline{A}\cap\overline{C}$ の要素 x がとり得る値の範囲は ウ$\boxed{\quad}$ である。

(解説)

$|4-3x|\leqq 5$ より $-5\leqq 3x-4\leqq 5$ であるから，A の要素 x がとり得る値の範囲は

ア$-\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 3$ である。

次に，$x^2-x-2\leqq 0$ を解くと $(x+1)(x-2)\leqq 0$ より $-1\leqq x\leqq 2$ であるから，B の要素 x がとり得る値の範囲は $-1\leqq x\leqq 2$ である。

よって，$A\cup B$ の要素 x がとり得る値の範囲は イ$-1\leqq x\leqq 3$ である。

$\overline{A}=\left\{x \mid x<-\dfrac{1}{3},\ 3<x\right\}$，$\overline{C}=\{x \mid x<0\}$ であるから，$\overline{A}\cap\overline{C}$ の要素 x がとり得る値の範囲は ウ$x<-\dfrac{1}{3}$ である。

5

次の $\boxed{\quad}$ に当てはまるものを下記の ①～④ のうちから一つ選べ。ただし，同じ番号を繰り返し選んでもよい。

実数 x に関する条件 p，q，r を

$$p:\ -1\leqq x\leqq\frac{7}{3},\qquad q:\ |3x-5|\leqq 2,\qquad r:\ -5\leqq 2-3x\leqq -1$$

とする。このとき，p は q であるための ア$\boxed{\quad}$。q は p であるための イ$\boxed{\quad}$。

また，r は q であるための ウ$\boxed{\quad}$。

① 必要十分条件である　② 必要条件でも十分条件でもない

③ 必要条件であるが，十分条件ではない　④ 十分条件であるが，必要条件ではない

(解説)

$|3x-5|\leqq 2$ より　$-2\leqq 3x-5\leqq 2$

すなわち　$1\leqq x\leqq\dfrac{7}{3}$

したがって，$p\Longrightarrow q$ は偽，$q\Longrightarrow p$ は真である。

よって，p は q であるための必要条件であるが，十分条件ではない（ア③）

q は p であるための十分条件であるが，必要条件ではない（イ④）

$-5\leqq 2-3x\leqq -1$ より　$1\leqq x\leqq\dfrac{7}{3}$

したがって，$q\Longrightarrow r$，$r\Longrightarrow q$ はいずれも真である。

よって，r は q であるための必要十分条件である（ウ①）

6

a は正の定数とする。実数 x についての条件 p，q を

$$p:\ a<x<2a\qquad q:\ 2<x<3$$

と定めるとき，p が q であるための必要条件となるような a の値の範囲を求めよ。

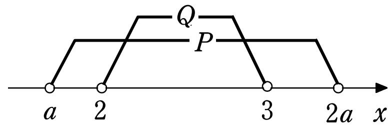
(解説)

p が q であるための必要条件となるのは，命題 $q\Longrightarrow p$ が真となるときである。

よって，$P=\{x \mid a<x<2a\}$，$Q=\{x \mid 2<x<3\}$

とすると，$Q\subset P$ が成り立てばよいから

$a\leqq 2$ かつ $3\leqq 2a$



ゆえに，求める a の値の範囲は　$\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 2$

7

自然数 m，n に対し，命題『m^2+n^2 が偶数ならば，$m+n$ は偶数である』が，真ならば「真」と答えよ。偽ならば反例を答えよ。

解説

命題の対偶『$m+n$ が奇数ならば，m^2+n^2 は奇数である』について考える。
$m+n$ が奇数であるとき，m と n の一方が偶数で一方が奇数である。
偶数を $2k$，奇数を $2l-1$（k，l は自然数）とすると

$$m^2+n^2=(2k)^2+(2l-1)^2=4k^2+4l^2-4l+1$$
$$=2(2k^2+2l^2-2l)+1$$

$2k^2+2l^2-2l$ は整数であるから，m^2+n^2 は奇数。
よって，対偶が真であるから，もとの命題も真である。

8

a，b を自然数とするとき，次の命題の真偽を調べ，真である場合には証明し，偽である場合には反例をあげよ。

(1)　$2a+b$ が偶数ならば，a または b は偶数である。

(2)　a^2+b^2 が偶数ならば，a または b は偶数である。

解説

(1)　与えられた命題の対偶は

「a，b がともに奇数ならば，$2a+b$ は奇数である」　……①

a，b が奇数のとき，m，n を 0 以上の整数として $a=2m+1$，$b=2n+1$ と表される。このとき　$2a+b=2(2m+1)+(2n+1)=2(2m+n+1)+1$
よって，$2a+b$ は奇数である。
① が真であるから，もとの命題も真である。

(2)　$a=1$，$b=1$ のとき，a^2+b^2 は偶数であるが，a，b はともに奇数である。
よって，この命題は偽である。

9

整数 m，n に関する次の命題について，正しければ ○，誤っていれば × と答えよ。

(1)　$m+n$ が 2 で割り切れないならば，mn は 2 で割り切れる。

(2)　mn が 2 で割り切れないならば，$m+n$ は 2 で割り切れない。

(3)　$m+n$ が 2 で割り切れるならば，mn は 2 で割り切れる。

解説

(1)　$m+n$ が 2 で割り切れないとき，m，n のうち一方が奇数で他方が偶数であり，mn は 2 で割り切れる。
よって，正しいから　○

(2)　mn が 2 で割り切れないとき，m，n はともに奇数であり，$m+n$ は 2 で割り切れる。
よって，誤っているから　×

(3)　$m+n$ が 2 で割り切れるとき，m，n はともに奇数，または，m，n はともに偶数であり，m，n がともに奇数のとき mn は 2 で割り切れない。
よって，誤っているから　×

別解　(3) は (2) の対偶であるから，命題の真偽は一致する。
よって　×

10

下記の ⓪ ～ ③ のうちから，次の $\boxed{}$ に当てはまるものを 1 つずつ選べ。

(1)　実数 a，b に対して，$a \geqq b$ であることは，$|a-b|=a-b$ が成り立つための $^{ア}\boxed{}$。

(2)　実数 a，b に対して，$a>0$ かつ $b>0$ であることは，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ が異なる 2 つの正の実数解をもつための $^{イ}\boxed{}$。

(3)　自然数 m，n に対して，m^2+n^2 を 4 で割って 2 余ることは，m，n がともに奇数であるための $^{ウ}\boxed{}$。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(解説)

(1) $|a-b|=a-b$ であることと，$a-b \geqq 0$ すなわち $a \geqq b$ であることは同値である。

ゆえに　⓪ 必要十分条件である

(2) 「$a>0$ かつ $b>0$ ならば，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ が異なる 2 つの正の実数解をもつ」は偽である。

(反例) $a=1$，$b=1$　(このとき，2 次方程式は虚数解をもつ)

「2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ が異なる 2 つの正の実数解をもつならば，$a>0$ かつ $b>0$」は真である。

(証明) 異なる 2 つの正の実数解をもつとき，それを α，β とすると

$$\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$$

一方，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=b$

したがって　$a>0$ かつ $b>0$

ゆえに　① 必要条件であるが，十分条件ではない

(3) 自然数 m，n について，次の [1] ～ [3] のいずれかが成り立つ。

[1] m，n がともに偶数のとき

$m=2k$，$n=2l$ (k，l は自然数) とすると

$$m^2+n^2=(2k)^2+(2l)^2=4k^2+4l^2=4(k^2+l^2)$$

k^2+l^2 は整数であるから，m^2+n^2 を 4 で割った余りは　0

[2] m，n がともに奇数のとき

$m=2k-1$，$n=2l-1$ (k，l は自然数) とすると

$$m^2+n^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2=4k^2-4k+1+4l^2-4l+1$$
$$=4(k^2-k+l^2-l)+2$$

k^2-k+l^2-l は整数であるから，m^2+n^2 を 4 で割った余りは　2

[3] m，n の一方が偶数で一方が奇数のとき

偶数を $2k$，奇数を $2l-1$ (k，l は自然数) とすると

$$m^2+n^2=(2k)^2+(2l-1)^2=4k^2+4l^2-4l+1=4(k^2+l^2-l)+1$$

k^2+l^2-l は整数であるから，m^2+n^2 を 4 で割った余りは　1

[1] ～ [3] から，「m^2+n^2 を 4 で割って 2 余るならば，m，n がともに奇数である」は真である。

また，[2] から，「m，n がともに奇数ならば，m^2+n^2 を 4 で割って 2 余る」も真である。

ゆえに　⓪ 必要十分条件である

$\boxed{11}$

以下の $^{ア}\boxed{\quad}$ ～ $^{オ}\boxed{\quad}$ にあてはまる最も適切な文・記号・言葉を，次の ⓪ ～ ⑨ の中から選べ。

⓪ $<$　① $>$　② $\geqq$　③ $\leqq$　④ かつ　⑤ または

⑥ 必要十分条件である。　⑦ 必要条件であるが，十分条件ではない。

⑧ 十分条件であるが，必要条件ではない。

⑨ 必要条件でも十分条件でもない。

(1) 「x，y が整数である」ことは「$x+y$ が整数である」ための $^{ア}\boxed{\quad}$

(2) 「四角形の対角線の長さが等しい」ことは「長方形である」ための $^{イ}\boxed{\quad}$

(3) 「$x \geqq 2$ または $x<-3$」の否定は「x $^{ウ}\boxed{\quad}$ 2 $^{エ}\boxed{\quad}$ x $^{オ}\boxed{\quad}$ -3」である。

(解説)

(1) 次のように，条件 p，q を定める。

p :「x，y は整数である」

q :「$x+y$ は整数である」

整数の和は整数であるから，$p \Longrightarrow q$ は真である。

また，$q \Longrightarrow p$ は偽である。

(反例 $x=1+\sqrt{2}$，$y=1-\sqrt{2}$)

よって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない。(^{ア}⑧)

(2) 次のように，条件 p，q を定める。

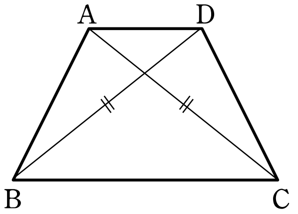
p :「四角形の対角線の長さが等しい」

q :「長方形である」

$p \Longrightarrow q$ は偽である。

(反例　AD∥BC，BC＝2AD，

AB＝DC の等脚台形 ABCD)



長方形の対角線の長さは等しいから，$q \Longrightarrow p$ は真である。

よって，p は q であるための必要条件であるが，十分条件ではない。(イ ⑦)

(3)「$x \geqq 2$ または $x < -3$」の否定は

「$x < 2$ かつ $x \geqq -3$」　(ウ ⓪　エ ④　オ ②)

$\boxed{12}$

以下の ア $\boxed{}$ ～ ケ $\boxed{}$ に入る正しい答えを (A)～(C) から選べ。ただし，“必要十分条件”があてはまるところに，“必要条件”または“十分条件”と解答した場合は不正解とする。また，x，a，b は実数，n は整数，θ は一般角を表す。

(A)　必要条件　　(B)　十分条件　　(C)　必要十分条件

(1)　「$x=4$」は，「$x^2-x-12=0$」の ア $\boxed{}$ である。

(2)　「$x^2>16$」は，「$x>6$」の イ $\boxed{}$ である。

(3)　「$a>b$」は，「$a^3>b^3$」の ウ $\boxed{}$ である。

(4)　「$a<0$ または $b<0$」は，「$ab<0$」の エ $\boxed{}$ である。

(5)　「$a+b>0$ かつ $ab>0$」は，「$a>0$ かつ $b>0$」の オ $\boxed{}$ である。

(6)　「ab が有理数である」は，「a と b がともに有理数である」の カ $\boxed{}$ である。

(7)　「$a+b$ と ab がともに整数である」は，「a と b がともに整数である」の キ $\boxed{}$ である。

(8)　「n^2 が 2 の倍数である」は，「n が 2 の倍数である」の ク $\boxed{}$ である。

(9)　「$30° \leqq \theta \leqq 150°$」は，「$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2}$」の ケ $\boxed{}$ である。

解説

(1)　$x=4$ のとき　$x^2-x-12=4^2-4-12=0$

よって，「$x=4 \Longrightarrow x^2-x-12=0$」は真。

また，$x^2-x-12=0$ を解くと　$x=-3，4$

よって，「$x^2-x-12=0 \Longrightarrow x=4$」は偽。

(反例：$x=-3$)

したがって　十分条件

(2)　「$x^2>16 \Longrightarrow x>6$」は偽。(反例：$x=-5$)

$x>6$ のとき　$x^2>6^2=36>16$

よって，「$x>6 \Longrightarrow x^2>16$」は真。

したがって　必要条件

(3)　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)\left\{\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\right\}$

a，b は実数であるから　$\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2 \geqq 0$

等号は $a+\dfrac{b}{2}=0$，$b=0$ すなわち $a=b=0$ のとき成り立つ。

よって，「$a>b \Longrightarrow a^3>b^3$」，「$a^3>b^3 \Longrightarrow a>b$」はともに真。

したがって　必要十分条件

(4)　「$a<0$ または $b<0 \Longrightarrow ab<0$」は偽。

(反例：$a=b=-1$)

$ab<0$ は「$a>0$ かつ $b<0$」または「$a<0$ かつ $b>0$」と同値である。

よって，「$ab<0 \Longrightarrow a<0$ または $b<0$」は真。

したがって　必要条件

(5)　$ab>0$ は「$a>0$ かつ $b>0$」または「$a<0$ かつ $b<0$」と同値である。

このうち，$a+b>0$ も満たすのは「$a>0$ かつ $b>0$」である。

よって，「$a+b>0$ かつ $ab>0 \Longrightarrow a>0$ かつ $b>0$」は真。

「$a>0$ かつ $b>0 \Longrightarrow a+b>0$ かつ $ab>0$」は真。

したがって　必要十分条件

(6) 「ab が有理数である」$\Longrightarrow$「a と b がともに有理数である」は偽。

(反例：$a=b=\sqrt{2}$)

「a と b がともに有理数である」$\Longrightarrow$「ab が有理数である」は真。

したがって　必要条件

(7) 「$a+b$ と ab がともに整数である」$\Longrightarrow$「a と b がともに整数である」は偽。

(反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$)

「a と b がともに整数である」$\Longrightarrow$「$a+b$ と ab がともに整数である」は真。

したがって　必要条件

(8) 「n^2 が 2 の倍数である」$\Longrightarrow$「n が 2 の倍数である」の対偶

「n が 2 の倍数でない」$\Longrightarrow$「n^2 が 2 の倍数でない」は真。

よって，「n^2 が 2 の倍数である」$\Longrightarrow$「n が 2 の倍数である」も真。

「n が 2 の倍数である」$\Longrightarrow$「n^2 が 2 の倍数である」は真。

したがって　必要十分条件

(9) 「$30° \leqq \theta \leqq 150°$」$\Longrightarrow$「$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2}$」は真。

「$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2}$」$\Longrightarrow$「$30° \leqq \theta \leqq 150°$」は偽。(反例：$\theta=450°$)

したがって　十分条件

13

次のおのおのの文について，$\boxed{}$ にあてはまるものを

(A)　必要であるが十分でない　　(B)　十分であるが必要でない

(C)　必要かつ十分である　　(D)　必要でも十分でもない

の中から選び，対応する記号で答えよ．

(1)　整数 n について n^2 が 2 で割り切れることは，n が 2 で割り切れるために $\boxed{}$.

(2)　整数 n について n^2 が 12 で割り切れることは，n が 12 で割り切れるために $\boxed{}$.

(3)　整数 n について n^2 が 4 で割り切れることは，n が 4 で割り切れるために $\boxed{}$.

(4)　正の整数 n について $\sqrt{n}$ が 2 の倍数であることは，n が 2 で割り切れるために $\boxed{}$.

(5)　整数 n について $\sqrt{n}$ が無理数であることは，n が奇数であるために $\boxed{}$.

(解説)

(1)　「整数 n について n^2 が 2 で割り切れるならば，n は 2 で割り切れる」

(証明)　もし，n が 2 で割り切れないとすると，$n=2k-1$ (k は整数)とおける．このとき，$n^2=4k^2-4k+1=4(k^2-k)+1$ となり，n^2 は 2 で割り切れない．これは仮定に反する．よって，この命題は真．

「整数 n について n が 2 で割り切れるならば，n^2 は 2 で割り切れる」

(証明)　n が 2 で割り切れるから，$n=2k$ (k は整数)とおける．このとき，$n^2=2\cdot 2k^2$ となり，n^2 も 2 で割り切れる．よって，この命題は真．

ゆえに，(C) 必要かつ十分である．

(2)　「整数 n について n^2 が 12 で割り切れるならば，n は 12 で割り切れる」

(反例)　$n=6$ のとき，$n^2=36$ は 12 で割り切れるが，n は 12 で割り切れない．

よって，この命題は偽．

「整数 n について n が 12 で割り切れるならば，n^2 は 12 で割り切れる」

(証明)　n が 12 で割り切れるから，$n=12k$ (k は整数)とおける．このとき，$n^2=12\cdot 12k^2$ となり，n^2 も 12 で割り切れる．よって，この命題は真．

ゆえに，(A) 必要であるが十分でない．

(3)　「整数 n について n^2 が 4 で割り切れるならば，n は 4 で割り切れる」

(反例)　$n=2$ のとき，$n^2=4$ は 4 で割り切れるが，n は 4 で割り切れない．

よって，この命題は偽．

「整数 n について n が 4 で割り切れるならば，n^2 は 4 で割り切れる」

(証明)　n が 4 で割り切れるから，$n=4k$ (k は整数)とおける．このとき，$n^2=4\cdot 4k^2$

となり，n^2 も 4 で割り切れる．よって，この命題は真．

ゆえに，(A) 必要であるが十分でない．

(4) 「正の整数 n について $\sqrt{n}$ が 2 の倍数ならば，n は 2 で割り切れる」

(証明) $\sqrt{n}$ が 2 の倍数であるから，$\sqrt{n}=2m$ (m は正の整数)とおける．このとき，

$n=2\cdot 2m^2$ となり，n は 2 で割り切れる．よって，この命題は真．

「正の整数 n について n が 2 で割り切れるならば，$\sqrt{n}$ は 2 の倍数である」

(反例) $n=2$ のとき，n は 2 で割り切れるが，$\sqrt{n}$ は 2 の倍数でない．

よって，この命題は偽．

ゆえに，(B) 十分であるが必要でない．

(5) 「整数 n について $\sqrt{n}$ が無理数ならば，n は奇数である」

(反例) $\sqrt{2}$ は無理数であるが，2 は奇数でない．よって，この命題は偽．

「整数 n について n が奇数ならば，$\sqrt{n}$ は無理数である」

(反例) $n=9$ は奇数であるが，$\sqrt{n}=3$ は有理数である．よって，この命題は偽．

ゆえに，(D) 必要でも十分でもない．

14

次の $\boxed{}$ にあてはまるものを下の ① ～ ④ の中から選べ。

(1) 実数 x，y について，$xy<0$ は，$x^2+y^2>0$ であるための ${}^{ア}\boxed{}$ 。

(2) △ABC の 3 辺の長さを BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とする。c を最大辺とするとき，

$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$ は，△ABC が直角三角形であるための ${}^{イ}\boxed{}$ 。

① 必要条件であるが十分条件でない　　② 十分条件であるが必要条件でない

③ 必要十分条件である　　④ 必要条件でも十分条件でもない

(解説)

(1) $xy<0$ のとき

$(x>0$ かつ $y<0)$ または $(x<0$ かつ $y>0)$

いずれの場合も　$x^2>0$，$y^2>0$　　すなわち　$x^2+y^2>0$

よって，「$xy<0 \Longrightarrow x^2+y^2>0$」は真である。

また，「$x^2+y^2>0 \Longrightarrow xy<0$」は偽である。　(反例：$x=2$，$y=3$)

ゆえに，$xy<0$ は，$x^2+y^2>0$ であるための十分条件である。

したがって　^{ア}②

(2) 「$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0 \Longrightarrow$ △ABC が直角三角形である」は偽である。

(反例：$a=3$，$b=3$，$c=4$)

また，△ABC が直角三角形であるとき，c が最大辺であるから，三平方の定理により

$a^2+b^2=c^2$　　すなわち　$a^2+b^2-c^2=0$

よって　$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

したがって，

「△ABC が直角三角形である $\Longrightarrow (a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$」は真である。

ゆえに，$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$ は，△ABC が直角三角形であるための 必要条件である。

したがって　^{イ}①