※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $A = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく．$\sup A,\ \inf A$ を求めよ．答のみでよい．

$\boxed{2}$ 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \log(1+x) - 1}{x - \arctan x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$

$\boxed{3}$ $x > -1$ のとき，$\arctan x + \arctan \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ とおく．

(1) $(1-x^2)f'(x) - xf(x)$ を計算せよ．

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$f^{(2n)}(0)$ と $f^{(2n+1)}(0)$ を求めよ．

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!n^n}{(2n)!}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{\arcsin x - x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(4) $\displaystyle\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}$

(3) $\displaystyle\int \arctan x dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2x\arcsin x dx$

$\boxed{2}$ (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C, D の値を求めよ.

$$\frac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+5}$$

(2) $\displaystyle\int\frac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}dx$ を求めよ.

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ とおく.

(1) $(1-x^2)f'(x)-xf(x)$ を計算せよ.

(2) $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x)-(2n+1)xf^{(n)}(x)-n^2f^{(n-1)}(x)=0$$

が成り立つことを示せ.

(3) $f(x)$ の Maclaurin（マクローリン）展開の 9 次以下の項を求めよ．ただし，**係数は既約分数**にすること．また，10 次以上の項について求めた場合は，係数が 0 でない項に対し**最大 10 点まで加点する**.

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ (1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき，

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$ を求めよ.

$\boxed{2}$ (1) $t = \sqrt{x^2+1}+x$ とおくとき，

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad \sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{2t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ.

$\boxed{3}$ $f(x,y) = xy(1-x-y^4)$ について，次の問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

※ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 \quad \Longrightarrow \quad f(a,b)$：極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 \quad \Longrightarrow \quad f(a,b)$：極大値
$H(a,b)<0 \quad \Longrightarrow \quad f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ とする.

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $f(x,y)=x^3+y^3-2x^2-2y^2+xy$ について，次の問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(3) $x^3+y^3=-2$ に制限した $f(x,y)$ が点 $(-1,-1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_3^6\left(\int_1^{x^2}\frac{x}{y^2}dy\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_x^{x^2}\frac{2x^2}{x^2+y^2}dy\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 xe^{y^2}dy\right)dx$ （順序変更）

(4) $\displaystyle\int\int_D \log(x^2+y^2)dxdy \quad (D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(5) $\displaystyle\int\int_D x dxdy \quad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$