平成 21 年度前期中間試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $A = \left\{ (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく．$\sup A$, $\inf A$ を求めよ．答のみでよい．

$\boxed{2}$ 次の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{3n}}{(3n)!}}$

(2) $\arctan \dfrac{1}{7} + \arctan \dfrac{1}{8} - \arctan \dfrac{3}{11}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{\arctan x - x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right)$

$\boxed{3}$ $x > 1$ のとき，$2 \arctan x + \arcsin \dfrac{2x}{x^2+1} = \pi$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ とおく．

(1) $(1-x^2)f'(x) - xf(x)$ を計算せよ．

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$f^{(2n)}(0)$ と $f^{(2n+1)}(0)$ を求めよ．

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次を求めよ．**(1) 〜 (4) は答のみでよい．**

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!n^{2n}}{(3n)!}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\sin x)^{\frac{1}{\log x}}$

(4) $\displaystyle 2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$

(5) $\displaystyle\int\arctan x dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}2x\arcsin x dx$

(7) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

$\boxed{2}$ (1) 次の等式が成り立つような定数 A,B,C,D,E の値を求めよ．**(1) は答のみでよい．**

$$\frac{-8x^2+18x+2}{(x+1)(x-1)^2(x^2-2x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2-2x+3}$$

(2) $\displaystyle\int\frac{-8x^2+18x+2}{(x+1)(x-1)^2(x^2-2x+3)}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(0)=1,\ (1+x^2)f'(x)=f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ の Maclaurin（マクローリン）展開の 5 次以下の項を求めよ．ただし，**係数は既約分数**にすること．必要ならば，$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを用いてよい．

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくことにより，$\displaystyle\int\frac{3+\sin x}{\cos x(2+\cos x)}dx$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $\sqrt{x^2+1}+x=t$ とおくことにより，$\displaystyle\int\frac{2}{2\sqrt{x^2+1}+1}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(x,y)=x^3-x^2-x+2xy^2-xy^3$ について，次の問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$：極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$：極大値
$H(a,b)<0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする．

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$　$f(x,y)=x^3+y^3+x^2+xy+y^2$ について，次の問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(3) $x^3+y^3=2$ に制限した $f(x,y)$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ.

$\boxed{2}$　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2\left(\int_{e^x}^{e^2}\frac{1}{xy}dy\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+y^2}dy\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2\left(\int_{\frac{1}{x}}^1 y^2e^{xy}dy\right)dx$　（順序変更）

(4) $\displaystyle\int\int_D \log(x^2+y^2)dxdy$　$(D: 1\leqq x^2+y^2\leqq 4,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0)$

(5) $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$　$(D: x\leqq x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0)$