※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $A = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ とおく．$\sup A,\ \inf A$ を求めよ．**答のみでよい．**

$\boxed{2}$ 次の値を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)^{2n}}{(2n+1)!}}$　(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \log\sqrt{n} \right)$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x}$　(4) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x-(x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$　(6) $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(7) $\displaystyle \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{8} - \arctan\frac{1}{21}$

$\boxed{3}$ $0 < x < 1$ のとき，$\displaystyle \arctan\frac{2x}{1-x^2} + 2\arctan\frac{1}{x} = \pi$ が成り立つことを示せ.

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次を求めよ．**(1) 〜 (4) は答のみでよい．**

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(3n+2)!}{(2n)!n^n}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^2\sin^2 x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}|\sin x|^{\frac{1}{\log|x|}}$

(4) $\displaystyle 2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{18}$

(5) $\displaystyle\int\arcsin x\,dx$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}}(3x^2+1)(\arctan x)^2dx$

(7) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

$\boxed{2}$ (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C, D, E の値を求めよ．**(1) は答のみでよい．**

$$\frac{-8x^2-18x+2}{(x-1)(x+1)^2(x^2+2x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+3}$$

(2) $\displaystyle\int\frac{-8x^2-18x+2}{(x-1)(x+1)^2(x^2+2x+3)}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(0)=1,\ (2-2x)f'(x)=(1-2x)f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ の Maclaurin（マクローリン）展開の 5 次以下の項を求めよ．ただし，**係数は既約分数**にすること．必要ならば，$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$(2-2x)f^{(n+1)}(x)-2nf^{(n)}(x)=(1-2x)f^{(n)}(x)-2nf^{(n-1)}(x)$$

が成り立つことを用いてよい．

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $\tan x = t$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}dx$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $\sqrt{x^2+x+1}+x = t$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}dx$ を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(x,y) = x^3y - 2x^2y - 4xy - y^3 - y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$：極小値
$H(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$：極大値
$H(a,b)<0 \quad\Longrightarrow\quad f(a,b)$：極値でない
ただし $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ とする．

平成 22 年度後期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $f(x,y)=x^3+y^3+\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}y^2+6xy$ について，次の問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(3) $x^2y+xy^2=2$ に制限した $f(x,y)$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_2^5\left(\int_3^{x^2}\frac{x}{y^2}dy\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_4^{4\sqrt{3}}\left(\int_x^{\frac{x^2}{4}}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2\left(\int_1^{\frac{2}{x}}y^2e^{xy}dy\right)dx$ （順序変更）

(4) $\displaystyle\int\int_D\frac{y^2}{x^2}dxdy\quad(D:1\leqq x^2+y^2\leqq 4,\ 0\leqq y\leqq x)$

(5) $\displaystyle\int\int_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy\quad(D:x\leqq x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0)$