

科目名	微積分学	対 象	10B-A	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 23 年 11 月 30 日 (水) 3 回目 (~ 時限目)			担 当	石 川 学		学 年		氏 名		
試 験 時 間	90 分		注 意 事 項 ① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照 持込可 ()							

$$\boxed{1} \quad \frac{-10x^2 - 15x + 43}{(x-1)(x-2)(x^2+6x+11)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+6x+11}$$

が常に成り立つとき

$$A = \boxed{}, B = \boxed{}, C = \boxed{}, D = \boxed{}$$

だから

$$\int \frac{-10x^2 - 15x + 43}{(x-1)(x-2)(x^2+6x+11)} dx$$

$$\boxed{3} \quad \sqrt{x^2+x+1} + x = t \text{ とおくことにより,}$$

$$\int \frac{7}{(8x+3)\sqrt{x^2+x+1}} dx \text{ を求めよ.}$$

$$\boxed{2} \quad \tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくことにより, } \int \frac{1}{5 \cos x + 12 \sin x + 13} dx$$

を求めよ.

□4 次の広義積分を求めよ.

(1) $\int_0^3 (2x+1) \log x dx$

(2) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$

□5 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - xy$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ. 答のみでよい.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

※ $f(x, y) : C^2$ 級で, $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする.

科目名	微積分学	対象	10B-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 23 年 11 月 30 日 (水) 3 回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏 名		
試験 時間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

$$\boxed{1} \quad \frac{-10x^2 - 15x + 43}{(x-1)(x-2)(x^2+6x+11)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+6x+11}$$

が常に成り立つとき

$$A = \boxed{-1}, B = \boxed{-1}, C = \boxed{2}, D = \boxed{5}$$

だから

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{-10x^2 - 15x + 43}{(x-1)(x-2)(x^2+6x+11)} dx \\
 &= \int \left(-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2x+5}{x^2+6x+11} \right) dx \\
 &= \int \left\{ -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{(2x+6)-1}{x^2+6x+11} \right\} dx \\
 &= \int \left\{ -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2x+6}{x^2+6x+11} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2+(x+3)^2} \right\} dx \\
 &= -\log|x-1| - \log|x-2| + \log(x^2+6x+11) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+3}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \quad \tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくことにより, } \int \frac{1}{5 \cos x + 12 \sin x + 13} dx \text{ を求めよ.}$$

$$\tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくことにより}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

これから

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{1}{5 \cos x + 12 \sin x + 13} dx \\
 &= \int \frac{1}{5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 12 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 13} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
 &= \int \frac{1}{4t^2 + 12t + 9} dt \\
 &= \int \frac{1}{(2t+3)^2} dt
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2(2t+3)}$$

$$= -\frac{1}{2(2 \tan \frac{x}{2} + 3)}$$

$$\boxed{3} \quad \sqrt{x^2+x+1} + x = t \text{ とおくことにより,}$$

$$\int \frac{7}{(8x+3)\sqrt{x^2+x+1}} dx \text{ を求めよ.}$$

$$\sqrt{x^2+x+1} + x = t \text{ とおくことにより } \sqrt{x^2+x+1} = t - x$$

両辺を2乗すると

$$x^2+x+1 = t^2 - 2tx + x^2$$

$$(2t+1)x = t^2 - 1 \quad \therefore x = \frac{t^2-1}{2t+1}$$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (2t+1) - (t^2-1) \cdot 2}{(2t+1)^2} = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}$$

さらに

$$\sqrt{x^2+x+1} = x - t = x - \frac{t^2-1}{2t+1} = \frac{t^2+t+1}{2t+1}$$

よって

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{7}{(8x+3)\sqrt{x^2+x+1}} dx \\
 &= \int \frac{7}{\left(8 \cdot \frac{t^2-1}{2t+1} + 3\right) \frac{t^2+t+1}{2t+1}} \cdot \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2} dt \\
 &= \int \frac{14}{8t^2+6t-5} dt \\
 &= \int \frac{14}{(2t-1)(4t+5)} dt \\
 &= \int \left(\frac{2}{2t-1} - \frac{4}{4t+5} \right) dt \\
 &= \log|2t-1| - \log|4t+5| \\
 &= \log|2\sqrt{x^2+x+1} + 2x-1| \\
 &\quad - \log|4\sqrt{x^2+x+1} + 4x+5|
 \end{aligned}$$

4 次の広義積分を求めよ。

(1) $\int_0^3 (2x+1) \log x dx$

$$\log x \begin{matrix} \nearrow x^2+x \\ \searrow 2x+1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \int (2x+1) \log x dx &= (x^2+x) \log x - \int (x+1) dx \\ &= (x^2+x) \log x - \frac{x^2}{2} - x \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^3 (2x+1) \log x dx &= \left[(x^2+x) \log x - \frac{x^2}{2} - x \right]_{\varepsilon}^3 \\ &= \left\{ 12 \log 3 - (\varepsilon^2+\varepsilon) \log \varepsilon \right\} - \frac{1}{2}(9-\varepsilon^2) - (3-\varepsilon) \\ &= 12 \log 3 - \varepsilon^2 \log \varepsilon - \varepsilon \log \varepsilon - \frac{15}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon \\ &\rightarrow 12 \log 3 - \frac{15}{2} \quad (\varepsilon \rightarrow +0) \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^3 (2x+1) \log x dx = 12 \log 3 - \frac{15}{2}$$

(2) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+1} dx &= \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-(2x-1)+3}{x^2-x+1} \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{3} \log|x+1| - \frac{1}{6} \log(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \log \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{1}{x^3+1} dx &= \left[\frac{1}{6} \log \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_1^R \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \log \frac{(R+1)^2}{R^2-R+1} - \log 4 \right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2R-1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6} \log \frac{\left(1+\frac{1}{R}\right)^2}{1-\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}} - \frac{1}{3} \log 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2R-1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot 0 - \frac{1}{3} \log 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \log 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \log 2$$

※ $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

と分解の形を定め、分母をそろえると

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

5 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - xy$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ。答のみでよい。

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ。

※ $f(x, y) : C^2$ 級で、 $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow f(a, b) : \text{極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow f(a, b) : \text{極大値}$

$H(a, b) < 0 \Rightarrow f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする。

$$(1) \begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 - 6x - y = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ f_y(x, y) = 3y^2 - 6y - x = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ② より

$$3(x-y)(x+y) - 5(x-y) = 0$$

$$(x-y)\{3(x+y) - 5\} = 0 \quad \therefore y=x \text{ または } x+y = \frac{5}{3}$$

(i) $y=x$ のとき、① より $3x^2 - 7x = 0$

$$x(3x-7) = 0 \quad \therefore x = 0, \frac{7}{3}$$

(ii) $x+y = \frac{5}{3}$ のとき、① + ② より

$$3\{(x+y)^2 - 2xy\} - 7(x+y) = 0$$

$$3\left(\frac{25}{9} - 2xy\right) - \frac{35}{3} = 0 \quad \therefore xy = -\frac{5}{9}$$

これを、 x, y は $t^2 - \frac{5}{3}t - \frac{5}{9} = 0$ を解く。すなわち $9t^2 - 15t - 5 = 0$

の解となる。実際に解くと $t = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{6}$ とおけるから、簡単のため

$$\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{6}, \quad \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{6}$$

とおく。このとき、 $\alpha + \beta = \frac{5}{3}, \alpha\beta = -\frac{5}{9}$ となることに注意する。

以上 (i), (ii) より、停留点は

$$(0, 0), \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha)$$

(2) $f_{xx}(x, y) = 6x - 6, f_{yy}(x, y) = 6y - 6, f_{xy}(x, y) = -1$

$$H(x, y) = (6x-6)(6y-6) - (-1)^2 = 36xy - 36(x+y) + 35$$

$\cdot H(0, 0) = 35 > 0, f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$

$$\therefore f(0, 0) = 0 : \text{極大値}$$

$\cdot H\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right) = 63 > 0, f_{xx}\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right) = 8 > 0$

$$\therefore f\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right) = -\frac{343}{27} : \text{極小値}$$

$\cdot H(\alpha, \beta) = H(\beta, \alpha) = 36\alpha\beta - 36(\alpha+\beta) + 35$

$$= 36 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) - 36 \cdot \frac{5}{3} + 35$$

$$= -45 < 0$$

$$\therefore f(\alpha, \beta), f(\beta, \alpha) : \text{極値でない}$$

$\cdot x = -1 \cdots 1 = 3A \quad \therefore A = \frac{1}{3}$

$\cdot x = 0 \cdots 1 = A + C$

$$1 = \frac{1}{3} + C \quad \therefore C = \frac{2}{3}$$

$\cdot x = 1 \cdots 1 = A + 2(B+C)$

$$1 = \frac{1}{3} + 2\left(B + \frac{2}{3}\right) \quad \therefore B = -\frac{1}{3}$$